Endomorphisme et division euclidienne

Introduction

Dans ce problème, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A,B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

Par exemple, si on suppose que l'on a

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

L'objectif de ce problème est de montrer que φ est un endomorphisme d'étudier sa diagonalisabilité dans différents cas.

I. Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
2. On considère un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et un couple de polynômes $(P_1, P_2) \in \mathbb{C}_n[X]^2$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2.$$

Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

II. Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

1. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.
3. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

III. Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

1. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

2. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

IV. Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

1. On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

- **a)** Soit $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$. Calculer $L_k(x_j)$ en distinguant les cas $k = j$ et $k \neq j$.
- **b)** Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.
- **c)** Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$.
- **d)** Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

- **a)** Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.
- **b)** En utilisant la question **IV.1.c**, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k) L_k$.
- **c)** Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Fin