

La formule de Stirling

Introduction

L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat ci-dessous donnant un équivalent simple de la factorielle d'un entier naturel n .

Formule de Stirling (1730) : On a l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

I. Un résultat intermédiaire

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n v_k.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

2. Montrer qu'il existe un nombre réel $a > 0$ que l'on précisera tel que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$.
3. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente.
4. En déduire que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$.
5. Conclure qu'il existe un réel $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

II. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales définies par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

1. **Calcul des intégrales de Wallis.**

- a) Calculer W_0 , W_1 et W_2 .
- b) Montrer que $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

2. La suite des intégrales de Wallis.

- a) Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante de valeur $\pi/2$.
- b) Démontrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
- c) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- d) En utilisant les questions **II.2.a** et **II.2.b**, montrer que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

III. Calcul de la constante C

On a montré à la question **I.5** qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Dans cette partie, nous allons déterminer la valeur de C en utilisant les résultats de la partie précédente.

- 1. En utilisant les résultats de la partie **II.1**, montrer que $W_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}}$.
- 2. En déduire avec les résultats de la partie **II.2** que $C = \sqrt{2\pi}$.

IV. Deux applications

- 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$.
- 2. On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}.$$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

- b) En utilisant la formule de Stirling, montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on précisera.

Fin