Variables aléatoires discrètes

Partie I Loi et espérance d'une variable aléatoire

Exercice 1 : On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note les résultats X et Y. On pose $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi de D.
2. Déterminer l'espérance de D.
3. Déterminer la variance de D.

Exercice 2 : On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire définie par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Calculer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Calculer l'espérance de $1/X$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise souhaite recruter un employé parmi n candidats. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle de manière indépendante un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Quelle valeur faut-il choisir pour p pour que l'on ait plus d'une chance sur deux de recruter un candidat.

Exercice 4 : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

Exercice 5 : Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 6 : Dans une urne contenant n boules blanches et n boules rouges, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages juste nécessaire à l'obtention de toutes les boules rouges.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7 : Une urne contient N boules dont pN sont blanches et $(1-p)N$ sont noires où $p \in]0,1[$. On tire $n \in [\![0, N]\!]$ boules sans remise et on note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X = k)$ avec des coefficients binomiaux.
2. Soit $k \in X(\Omega)$. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} P(X = k)$. Quelle loi reconnait-on?

Exercice 8 - Fonction de répartition : Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X suite une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer les probabilités $P(X \leqslant n)$ et $P(X \geqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 9 - Urnes de Pólya : Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne accompagnée d'une nouvelle boule de la même couleur. On note S_n le nombres de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. Déterminer la loi de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 - Urnes de Pólya : Une urne contient $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches et $r \in \mathbb{N}^*$ boule rouge. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne accompagnée d'une nouvelle boule de la même couleur. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une boule blanche au } n\text{-ième tirage} \\ 0 & \text{si on tire une boule rouge au } n\text{-ième tirage} \end{cases}$$

et $S_n = b + X_1 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer la loi de X_1 et X_2.
2. Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ avec l'espérance de S_n.
3. En déduire la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11 - Urnes de Pólya : Une urne contient $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches et $r \in \mathbb{N}^*$ boule rouge. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne accompagnée de $d \in \mathbb{N}^*$ nouvelles boules de la même couleur.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Déterminer la loi de X_n.
   (b) Soit $k \in X_n(\Omega)$. Déterminer la loi de X_{n+1} sachant $(X_n = k)$.
   (c) En déduire $\mathrm{E}(X_n)$.
2. On définit la variable aléatoire $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n > r\}$.
   (a) Déterminer la loi de T.
   (b) Montrer que T est d'espérance finie si et seulement si $b > d$.

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne et on retire toutes les boules de l'urne portant un numéro strictement supérieur à celui de la boule tirée. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note X_p le numéro de la boule tirée au p-ième tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer $P(X_p = n)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la loi de X_{p+1} en fonction de la loi de X_p.
4. Déterminer $\mathrm{E}(X_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 : Dans une urne figurent $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ boules numérotées de 1 à N. Dans celle-ci on opère des tirages successifs avec remise jusqu'à l'obtention d'une série de $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ boules consécutives identiques. On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

1. On note B l'évènement « le processus ne s'arrête pas ». En utilisant

   $$B \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left\{\text{Les tirages de rangs } ik+1, \ldots, ik+k \text{ ne sont pas tous identique}\right\},$$

   montrer que le processus s'arrête presque sûrement.
2. Calculer $P(T = k)$ et $P(T = k+1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(T = n+k) = \dfrac{N-1}{N^k} P(T > n)$.
4. En déduire que T est d'espérance finie et déterminer celle-ci.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit aléatoirement et uniformément une permutation σ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On note F le nombre de points fixes de σ et on considère les variables aléatoires

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad F_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sigma(k) = k \\ 0 & \text{si} \quad \sigma(k) \neq k. \end{cases}$$

Calculer l'espérance et la variance de F.

Exercice 15 : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Montrer que $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$.

Exercice 16 - Théorème des moments : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé fini. Montrer que X et Y suivent la même loi si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}\left(X^k\right) = \mathrm{E}\left(Y^k\right).$$

Exercice 17 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, N]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n) \quad \text{et} \quad E\left(X^2\right) = \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1)P(X > n).$$

Exercice 18 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$
2. En déduire que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $(P(X > k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que dans ce cas, on a
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$
3. Montrer que X^2 est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $((2k+1)P(X > k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, et que dans ce cas, on a
$$\mathrm{E}\left(X^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)P(X > k).$$

Exercice 19 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$.

1. Montrer que $\mathrm{V}(X) \leqslant 4^{-1}(b-a)^2$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 20 : Soit X une variable aléatoire telle que X^k est d'espérance finie pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$ et $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(X^4) = 1$. Déterminer la loi de X en fonction de $\alpha = \mathrm{E}(X)$.

Exercice 21 : Soient X une variable aléatoire réelle et $(p, q) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $p < q$.

1. Soit $m \in]0, 1[$. Montrer que l'on a l'inégalité
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad x^m \leqslant y^m + my^{m-1}(x - y).$$
2. En déduire que si la variable aléatoire $|X|^q$ est d'espérance finie, alors la variable aléatoire $|X|^p$ est d'espérance finie et on a $\mathrm{E}(|X|^p)^{1/p} \leqslant \mathrm{E}(|X|^q)^{1/q}$.

Exercice 22 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}.$$

1. Déterminer la constante a.
2. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ? Si oui, la calculer.

Exercice 23 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Déterminer la constante a.
2. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie ? Si oui, la calculer.

Exercice 24 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotés de 1 à 3. On place aléatoirement et uniformément les n boules dans les 3 compartiments de la boite. On note X_n le nombre de compartiments restés vides.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Déterminer l'espérance de X_n.
3. Déterminer la limite de la suite $(\mathrm{E}(X_n))$. Interpréter le résultat.

Exercice 25 : Soit X une variable aléatoire. Calculer l'espérance de $(X+1)^{-1}$ dans chacun des cas suivants.

(*i*) Si X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ avec $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$.

(*ii*) Si X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 26 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que $1/X$ est d'espérance finie, puis calculer là.

Exercice 27 : Un étudiant rentre d'une soirée. Il dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ clés dont une seule ouvre la porte de son appartement, mais il ne sait plus laquelle. On note X le nombre d'essai pour trouver la bonne clé.

1. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant les mauvaises clés. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. La soirée était bien arrosée : il ne se souvient pas des clés qu'il a déjà essayé. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 28 : On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, on a

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence et calculer la série entière $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.
2. On choisit aléatoirement un couple et on note X la variable aléatoire donnant leur nombre d'enfants. On suppose que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0,1[$.
   (a) Calculer la probabilité d'avoir au moins un enfant.
   (b) Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer la probabilité qu'un couple ait k garçons sachant qu'il a n enfants.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité d'avoir k garçons.

Exercice 29 : On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion de garçons.

1. Exprimer P en fonction de X.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de P.

Exercice 30 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois face et au moins une fois pile. On note T le nombre de lancer avant que le jeu s'arrête.

1. Déterminer $P(T=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que T est presque sûrement fini.
3. Montrer que T est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 31 : On lance une pièce qui a la probabilité 2/3 de faire pile. Les lancers sont supposés indépendants. On note T le nombre de lancer nécessaire afin d'avoir pour la première fois deux piles consécutifs. On note $p_n = P(T=n)$.

1. Déterminer p_2, p_3 et p_4.
2. Établir une relation entre p_{n+2}, p_{n+1} et p_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
3. En déduire une expression explicite de p_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
4. En déduire que T est presque sûrement fini.
5. Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 32 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit pour la première fois la séquence « pile - face ». On note T le nombre de lancer avant que le jeu s'arrête.

1. Calculer $P(T=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
2. En déduire que T est presque sûrement fini.
3. Montrer que T est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 33 : On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$. On note

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \mid X_n = X_{n-1} = 1\}.$$

1. Montrer que T est presque sûrement fini.
2. Calculer $P(T=2)$, $P(T=3)$ et exprimer la probabilité $P(T=n+2)$ en fonction des nombres $P(T=n+1)$ et $P(T=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
3. Montrer que T est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 34 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose

$$\exists p \in]0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = pP(X \geqslant n).$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 35 - Loi sans mémoire : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi sans mémoire, c'est à dire que pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$P(X>m) > 0 \quad \text{et} \quad P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n).$$

1. Montrer qu'une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ est sans mémoire.
2. Montrer que $P(X>0) = 1$.
3. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a

$$P(X > m+1) = P(X>1)P(X>m).$$

4. En déduire que X suit une loi géométrique.

Exercice 36 : Soit X une variable aléatoire suivant une géométrique dont le paramètre est $p \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 37 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson dont le paramètre est $\lambda > 0$. Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 38 : On tire un entier naturel X aléatoirement en suivant une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair et supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$ la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. Calculer $p+q$ et $p-q$. En déduire p et q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.
3. Un joueur est-il avantagé par rapport à l'autre ?

Exercice 39 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$ dont les coefficients m_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi d'espérance finie $\mu \in \mathbb{R}$. Calculer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 40 : Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que l'on a l'inégalité $P(T>n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n = P(T = n \mid T \geqslant n) \qquad (E).$$

1. Montrer que $\theta_n \in [0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $P(T \geqslant n)$ avec la suite (θ_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la série de terme général (θ_n) est divergente.
4. Réciproquement, si $(\theta_n) \in [0,1[^{\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série divergente, montrer qu'il existe une variable aléatoire T vérifiant (E).

Exercice 41 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ toutes définies sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{T})$. On définit une fonction $Y : \Omega \to E$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 42 - Inégalité de Paley-Zygmund : Soit Z un variable aléatoire réelle de variance finie. Montrer que

$$\forall \theta \in]0,1[, \quad P\big(Z \geqslant \theta \,\mathrm{E}(Z)\big) \geqslant (1-\theta)^2 \frac{\mathrm{E}(Z)^2}{\mathrm{E}(Z^2)}.$$

Exercice 43 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Pour tout indice $i \in [\![1, N]\!]$, on définit la variable aléatoire

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } X_k = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z_i pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.
2. En déduire l'espérance de $N_n = \mathrm{Card}\,(\{X_1, \dots, X_n\})$.

Exercice 44 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère les variables aléatoires définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad N_n = \mathrm{Card}\,(\{X_1, \dots, X_n\}).$$

1. Montrer que pour tout $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a $\mathrm{E}(N_n) \leqslant a + nP(X_1 \geqslant a)$.
2. En déduire que $\mathrm{E}(N_n) = o(n)$.
3. Montrer que si X_1 est d'espérance finie, alors $\mathrm{E}(N_n) = o(\sqrt{n})$.

Exercice 45 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_r$ suivant la loi uniforme sur $\mathscr{P}([\![1, n]\!])$.

1. Montrer que les variables aléatoires $\mathbb{1}_{X_i}(k)$ avec $i \in [\![1, r]\!]$ et $k \in [\![1, n]\!]$ sont indépendantes.
2. En déduire la loi de $N = \mathrm{Card}\,(X_1 \cap \cdots \cap X_r)$.

Exercice 46 - Entropie : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On définit, sous réserve d'existence, l'entropie de X par

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(P(X=n)) \quad \text{où} \quad \phi(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Calculer $H(X)$ si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
2. On note $p_n = P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0$, on a l'encadrement $0 \leqslant -\sqrt{p_n}\ln(p_n) \leqslant 1$.
   (b) Montrer que $\phi(p_n) \leqslant \max\left(n^{-3/2}, 3p_n\ln(n)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) En déduire que si X est d'espérance finie, alors $H(X)$ existe.

Partie II Variables aléatoires indépendantes

Exercice 47 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les nombres $P(X=Y)$ et $P(X\leqslant Y)$.

Exercice 48 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et suivant la même loi.

1. Montrer que $P(X=Y)\geqslant n^{-1}$.
2. Montrer que $P(X=Y)=n^{-1}$ si et seulement si X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Exercice 49 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois géométriques de paramètre $p\in]0,1[$ et $q\in]0,1[$.
Calculer $P(X=Y)$ et $P(X\leqslant Y)$.

Exercice 50 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définis sur un même espace probabilisé. On suppose que X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$ et que Y suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 51 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer la loi de la variable aléatoire $S=X+Y$ dans chacun des cas suivants.

(i) Si X suit la loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$ et Y suit la loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

(ii) Si X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ et Y suit la loi $\mathscr{B}(m,p)$ avec $(m,n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times]0,1[$.

(iii) Si X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathscr{P}(\mu)$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$.

(iv) Si X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ et Y suit la loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$.

Exercice 52 : Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire $M=\max(X,Y)$.

Exercice 53 : Soit $(n,N)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$ suivant la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$ et on définit la variable aléatoire $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

1. Déterminer la loi de M_n.
2. Montrer que l'on a
$$\mathrm{E}(M_n)=n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n.$$
3. Déterminer la limite de la suite $(P(M_n=N))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.
4. En utilisant la formule de l'exercice 17, déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(M_n)$ lorsque $N\to+\infty$.

Exercice 54 : On considère des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.

1. Soit $(i,k)\in[\![1,n]\!]\times\mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $P(X_i\geqslant k)$.
2. On note $Z=\min(X_1,\dots,X_n)$.
   (a) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $P(Z\geqslant k)$.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

Exercice 55 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère les variables aléatoires $U_n=\min(X_1,\dots,X_n)$ et $V_n=\max(X_1,\dots,X_n)$.

1. Montrer que U_n est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(U_n)$.
2. On note $q=1-p$.
   (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que V_n est d'espérance finie et que
$$\mathrm{E}(V_n)=\sum_{k=1}^{+\infty}1-\left(1-q^{k-1}\right)^n.$$
   (b) Déterminer un équivalent de $\mathrm{E}(V_n)$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 56 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère $M = \max(X,Y)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X \leqslant n)$ et $P(M \leqslant n)$.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire M.
3. En utilisant l'exercice 18, calculer l'espérance de M.

Exercice 57 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $D = X - Y$.
2. Déterminer la loi de $M = \min(X,Y)$.
3. Étudier l'indépendance des variables aléatoires D et M.

Exercice 58 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois géométriques de paramètre $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$.

Exercice 59 : Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre de « face » obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que X est presque sûrement fini.
3. Montrer que X est d'espérance finie, puis calculer là.
4. Si X prend la valeur $n \in \mathbb{N}$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. On note $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
   (b) Déterminer la loi de Z et montrer que Z et Y sont indépendantes.

Exercice 60 : On considère une suite de parties indépendantes de pile ou face, la probabilité d'obtenir « pile » étant égale à $p \in]0,1[$. Si $n \geqslant 1$, on note T_n le numéro de l'épreuve amenant le n-ième pile. Enfin, on pose $A_1 = T_1$ et $A_n = T_n - T_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. Déterminer la loi de T_1 et calculer son espérance.
2. Montrer que les variables aléatoires $A_1, \dots, A_n$ sont indépendantes et suivent la même loi.

Exercice 61 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètre $(r,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$ définie par $X(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant r\}$ et

$$\forall n \in X(\Omega), \quad P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

1. Montrer que si $X_1, \dots, X_r$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p, alors $X_1 + \cdots + X_r$ suit une loi binomiale négative de paramètre (r,p).
2. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 62 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère des variables aléatoires A_n, B_n, C_n et D_n indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![-n,n]\!]$ et on note

$$M_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la probabilité $P\big(M_n \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big)$.

Exercice 63 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois géométriques de paramètre $p \in]0,1[$ et $q \in]0,1[$. On note

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que la matrice A soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

Exercice 64 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère

$$M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que 1 soit valeur propre de M ?
3. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Exercice 65 : Soient $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$ et $q = 1-p$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant respectivement des lois binomiales de paramètre (n,p) et (n,q). On note

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que la matrice A soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

Exercice 66 : Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$. On considère trois variables aléatoires indépendantes X, Y et Z suivant la loi binomiale de paramètre (n,p). On note

$$M = \begin{pmatrix} X & X & X \\ Y & Y & Y \\ Z & Z & Z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que la matrice M soit inversible.
2. Déterminer la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur non nul.
3. Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire $T = \text{Card}(\text{Sp}(M))$.
4. Déterminer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 67 : Soit $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1-p$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $Z_n = X_1 \cdots X_n$.
2. Quelle est la limite de $P(Z_n = 1)$?

Exercice 68 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$. Pour $a \in [\![1,n]\!]$, on définit

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad Y(\omega) \leqslant a \\ Y(\omega) & \text{si} \quad Y(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Z.
2. Calculer l'espérance de Z et comparer la à celle de X.
3. Pour quelles valeurs de a l'espérance de Z est-elle maximale ?

Exercice 69 : Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère une suite de variable aléatoire réelle $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes de même loi et strictement positives. Montrer que la variable aléatoire

$$Z = \frac{X_1 + \cdots + X_m}{X_1 + \cdots + X_n}$$

est d'espérance finie et calculer $\text{E}(Z)$.

Exercice 70 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi d'espérance m et de variance σ^2.

1. Calculer l'espérance et la variance de $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Calculer l'espérance de $V_n = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (X_i - M_n)^2$.

Exercice 71 : Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. À quelle condition sur la fonction f les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Partie III Couples de variables aléatoires

III.A - Loi conjointe et lois marginales

Exercice 72 : Une commode est constituée de trois tiroirs. On y range aléatoirement une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi du couple (X,N).
2. Déterminer la loi de X et la loi de N.
3. Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires X et N.
4. Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 73 : On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note respectivement les résultats X et Y. On pose $U=\min(X,Y)$ et $V=\max(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V), puis la loi de U et la loi de V.
2. Calculer l'espérance de U et l'espérance de V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 74 : Soit (X,Y) un couple suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]^2$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 75 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de X et de Y.

Exercice 76 : Soit $p\in]0,1[$. On note $q=1-p$ et on considère des variables aléatoires indépendantes X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=P(Y=k)=pq^k.$$

On considère $U=\min(X,Y)$ et $V=\max(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Déterminer la loi de U et la loi de V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer l'espérance de U et de V.

Exercice 77 : Un archer tire sur $n\in\mathbb{N}$ cibles avec $n\geqslant 2$. À chaque tir, il a la probabilité $p\in]0,1[$ de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchés lors de cette tentative.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de $Z=X+Y$.

Exercice 78 : Un étudiant résout un QCM constitué de $n\in\mathbb{N}^*$ questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité $p\in]0,1[$ de savoir résoudre celle-ci. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu « au hasard ».

1. Déterminer la loi de $Z=X+Y$.
2. Calculer $\mathrm{E}(Z)$ et $\mathrm{V}(Z)$.

Exercice 79 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y vérifiant les conditions $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = aij.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.
5. Déterminer la loi de $M = \max(X, Y)$.

Exercice 80 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 81 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a(i + j)}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 82 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \binom{j}{i} a^j p(1-p)^j & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i > j. \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de X en utilisant la relation

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{i+1}} = \sum_{j=i}^{+\infty} \binom{j}{i} x^{j-i}.$$

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 83 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{i!\, j!}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 84 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{i + j}{\mathrm{e}\, i!\, j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}.$$

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que 2^{X+Y} est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 85 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{a}{i!\,2^{j+1}}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendants ?
4. Déterminer l'espérance de X et de Y.

Exercice 86 : On suppose qu'une colonie d'insectes produit N œufs où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $(N=n)$, le nombre X d'œufs qui éclosent suit une loi binomiale de paramètre n et $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de X.

Exercice 87 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On considère $S : \Omega \to \mathbb{N}$ et $T : \Omega \to \mathbb{N}$ définies par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega), \quad T(\omega) = N(\omega) - S(\omega).$$

1. Montrer que S et T sont des variables aléatoires discrètes.
2. Montrer que si N suit une loi de Poisson, alors les variables aléatoires S et T suivent des lois de Poisson et sont indépendantes.
3. On suppose que S et T sont indépendantes.
   (a) Montrer qu'il existe deux suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telles que
   $$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(N=i+j) = \frac{a_i b_j}{(i+j)!}.$$
   (b) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (c) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Exercice 88 : On dispose d'une pièce ayant la probabilité $p \in]0,1[$ de donner pile. On on réalise l'expérience suivante : on lance la pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir pile. On note N le nombre de lancers effectués. Puis, on relance à nouveau la pièce N fois et on compte le nombre X de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de N et de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 89 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes suivant une même loi et définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On considère l'application $S : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $S(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Exprimer $\mathrm{E}(S)$ en fonction des espérances de X_1 et N.
3. Exprimer $\mathrm{V}(S)$ en fonction des espérances et variances de X_1 et N.

III.B - Covariance

Exercice 90 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geqslant 2$. À un péage autoroutier n voitures franchissent équiprobablement et indépendamment l'une des N barrières de péage mises à leur disposition. Pour chaque $k \in [\![1,N]\!]$, on note X_k le nombre de voitures passant par la k-ième barrière.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_k pour tout $k \in [\![1,N]\!]$.
2. Calculer la variance de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_N$.
3. Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ avec $i \neq j$. Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ et $\rho(X_i, X_j)$.

Exercice 91 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$. On pose $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

1. Déterminer la loi de U et la loi de V.
2. Calculer l'espérance de U et l'espérance de V.
3. Calculer la covariance de U et V.

Exercice 92 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise deux jetons. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y celui du second.

1. Déterminer la loi du couple de (X, Y), la loi de X et la loi de Y.
2. Calculer la covariance de X et Y.
3. Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Exercice 93 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles de variance finie. On définit la matrice de covariance de $(X_1, \dots, X_n)$ par

$$M = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

1. Exprimer la variance de $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ en fonction de la matrice M.
2. En déduire que les valeurs propres de la matrice M sont toutes positives.

Exercice 94 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On tire successivement et sans remise toutes les boules de l'urne. On note X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le rang de sortie de la seconde boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de X et l'espérance de Y.
4. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 95 : Un signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Ce signal est perturbé par un bruit modélisé par une variable B indépendante de S centrée et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$. Déterminer le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{E}\big((Y - S)^2\big)$ soit minimale où $Y = aX + b$.

Exercice 96 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. On suppose que X et Y sont de variance finie et que $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{E}\big([Y - (aX + b)]^2\big)$ est minimale.

Partie IV Inégalités en probabilité

Exercice 97 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant la même loi. Montrer que si X est de variance finie, alors

$$P(X=Y) \geqslant 1-2\mathrm{V}(X).$$

Exercice 98 - Estimation : Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$. On choisit un échantillon de $n \in \mathbb{N}^*$ personnes parmi cette population et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ième individu présente la propriété étudiée, $X_i = 0$ sinon. On considère que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?
2. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n/n.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer l'inégalité
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
4. Quelle valeur de n doit-on choisir pour que S_n/n soit une approximation de p à $0,05$ près avec une probabilité supérieure à 95% ?

Exercice 99 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes deux à deux d'espérance finie m et de variance finie σ^2. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|S_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0 \quad \text{où} \quad S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Exercice 100 : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes deux à deux telles que X_n suit la loi $\mathscr{B}(p_n)$ avec $p_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad m_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(|S_n - m_n| \geqslant \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 101 : Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance finie m et de variance finie σ^2. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Calculer $\mathrm{E}\left((X - m + \lambda)^2\right)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $P(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + \lambda^2}{(\varepsilon + \lambda)^2}$.
3. En déduire que $P(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$ et $P(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$.
4. A quelle condition l'inégalité précédente est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev ?

Exercice 102 : Soit X une variable aléatoire centrée sur un espace probabilisé prenant ses valeurs dans $[-1,1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$\exp(tx) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\exp(-t) + \frac{1}{2}(1+x)\exp(t).$$
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et que
$$\mathrm{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp(t^2/2).$$
3. Soit $r > 0$. Établir $P(|X| > r) \leqslant 2\exp(-r^2/2)$.

Partie V Fonctions génératrices

Exercice 103 : Soient X une variable aléatoire réelle et $r \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)\cdots(X-r+1)$ dans les cas suivants.

(*i*) Si X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

(*ii*) Si X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

Exercice 104 : Une urne contient 4 boules rapportant respectivement $0, 1, 1$ et 2 points. On y effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu. On désigne par X_k le nombre de points obtenus au tirage de rang $k \in [\![1, n]\!]$.

1. Déterminer la fonction génératrice de X_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Déterminer la fonction génératrice de S.
3. En déduire la loi de S.

Exercice 105 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un réel $p \in]0,1[$, un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = a\binom{n+k}{k}p^k.$$

1. Calculer la fonction génératrice de X et en déduire la valeur de a.
2. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 106 : Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant une même loi et N une variable aléatoire indépendante à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes des X_i. On note $S = X_1 + \cdots + X_N$.

1. Montrer que $G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.
2. On suppose que X_1 et N sont d'espérance finie. Montrer que S est d'espérance finie et l'exprimer en fonction des espérances de X_1 et N.
3. On suppose que X_1 et N sont de variance finie. Montrer que S est de variance finie et l'exprimer avec les espérances et les variances de X_1 et N.

Exercice 107 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\exists (a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = b\left(\frac{a}{a+1}\right)^n$$

1. Exprimer b en fonction a.
2. Déterminer la fonction génératrice de X.
3. Montrer que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.
4. Montrer que la variable aléatoire X est de variance finie et calculer $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 108 : On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!}t^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant G.
2. Exprimer G avec les fonctions usuelles.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ telle que la fonction génératrice de X vérifie $G_X = \lambda G$.
   (a) Déterminer la valeur de λ et la loi de X.
   (b) Montrer que X est de variance finie, puis calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 109 : Montrer par les fonctions génératrices qu'il est impossible de « truquer » deux dés cubiques et indépendants pour que la somme d'un lancer suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

Solutions partielles

Exercice 1 : On a $\mathrm{E}(D) = 0$ et $\mathrm{V}(D) = 5/2$.

Exercice 2 : On a $P(X = k) = k/21$, $\mathrm{E}(X) = 91/21$, $\mathrm{V}(X) = 20/9$ et $\mathrm{E}(1/X) = 6/21$.

Exercice 3 :

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ et $P(X = n+1) = (1-p)^n$.
2. On a $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p}$.
3. Pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter un candidat, la valeur de p doit vérifier $p \geqslant 1 - 2^{-1/n}$.

Exercice 9 : On montre par récurrence que S_n suit la loi $\mathscr{U}([\![1, n+1]\!])$.

Exercice 10 : La variable aléatoire X_n suit la loi $\mathscr{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.

Exercice 12 :

3. On obtient avec la formule des probabilités totales que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(X_{p+1} = n) = \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} P(X_p = j).$$

4. On déduit de la formule précédente que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{E}(X_{p+1}) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(X_p) + \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\mathrm{E}(X_p) = \dfrac{n-1}{2^p} + 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 :

2. On a $P(T = k) = \dfrac{1}{N^{k-1}}$ et $P(T = k+1) = \dfrac{N-1}{N^k}$.
4. On a $\mathrm{E}(T) = \dfrac{N^k - 1}{N-1}$.

Exercice 14 : En utilisant $F = F_1 + \cdots + F_n$, on a $\mathrm{E}(F) = 1$ et $\mathrm{V}(F) = 1$.

Exercice 15 : Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 16 : Utiliser le théorème du transfert et une matrice de Vandermonde.

Exercice 18 : Remarquer que

$$nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1} kP(X = k).$$

Exercice 19 : Se ramener au cas où $a = 0$ et $b = 1$, puis écrire

$$\frac{1}{4} - \mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\big(X(1-X)\big) + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{E}(X)\right)^2.$$

Exercice 20 : Remarquer que $\mathrm{V}(X^2) = 0$.

Exercice 21 : Pour la question 2, il suffit considérer l'inégalité précédente avec les valeurs $m = p/q$, $x = |X|^q$ et $y = \mathrm{E}(|X|^q)$ pour justifier que $|X|^p$ est d'espérance finie. On conclut en prenant l'espérance de l'inégalité.

Exercice 22 : On a $a = 1$ et X n'a pas d'espérance.

Exercice 23 : On a $a = 4$ et $\mathrm{E}(X) = 2$.

Exercice 24 : La loi de X_n est donnée par $X_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{3^{n-1}}, \quad P(X_n = 1) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}, \quad P(X_n = 2) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}.$$

Exercice 25 :

(*i*) On a $\mathrm{E}\big((X+1)^{-1}\big) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

(*ii*) On a $\mathrm{E}\big((X+1)^{-1}\big) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$.

Exercice 26 : On trouve $E\left(\frac{1}{X}\right) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p}$.

Exercice 27 : Pour la question 1, la variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{U}\left(\llbracket 1,n\rrbracket\right)$ et on a $\mathrm{E}(X) = (n+1)/2$. Dans le second cas, on a que X suit la loi $\mathscr{G}(1/n)$ et $\mathrm{E}(X) = n$.

Exercice 28 : On trouve que $G+1$ suit la loi $\mathscr{G}\left(\dfrac{2p}{1+p}\right)$.

Exercice 29 : On a $P = 1/X$, la variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(1/2)$ et $\mathrm{E}(P) = \ln(2)$.

Exercice 30 : On a $P(T=n) = 2^{1-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $\mathrm{E}(T) = 3$.

Exercice 31 :

1. On a $p_2 = 4/9$, $p_3 = 4/27$ et $p_4 = 4/27$.
2. Avec la formule des probabilités totales, on a $p_{n+2} = \dfrac{1}{3}p_{n+1} + \dfrac{2}{9}p_n$.
3. On en déduit que $p_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} + \dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.
5. L'espérance de T est $15/4$.

Exercice 32 : On a $P(T=n) = \dfrac{n-1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{E}(T) = 4$.

Exercice 33 : On a $(T=+\infty) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{X_{2i+1} + X_{2i+2} \leqslant 1\}$. On trouve

$$P(T=n+2) = (1-p)P(T=n+1) + p(1-p)P(T=n).$$

En injectant la relation dans la définition de l'espérance que $\mathrm{E}(T) = \frac{1+p}{p^2}$.

Exercice 34 : On trouve que X suit la loi $\mathscr{G}(p)$.

Exercice 38 :

1. On trouve $p = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2a}}{2}$ et $q = \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-a})^2}{2}$.
2. L'espérance des gains de Pierre est $a\mathrm{e}^{-2a}$ et celle de Paul est $-a\mathrm{e}^{-2a}$.

Exercice 39 : En utilisant la formule du déterminant avec la signature, on obtient que $\mathrm{E}(\chi_M(\lambda)) = \chi_A(\lambda)$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à μ. On conclut que $\mathrm{E}(\chi_M(\lambda)) = (\lambda + n\mu)\lambda^{n-1}$.

Exercice 42 : Ecrire $Z = Z\mathbb{1}_{Z<\theta\mathrm{E}(Z)} + Z\mathbb{1}_{Z\geqslant\theta\mathrm{E}(Z)}$, puis utiliser la linéarité de l'espérance et l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le second terme.

Exercice 43 :

1. On a $P(Z_i = 0) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n$.
2. On en déduit que $\mathrm{E}(N_n) = \mathrm{E}(Z_1 + \cdots + Z_N) = N - N\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n$.

Exercice 44 :

1. Appliquer l'espérance à l'inégalité
$$\begin{aligned} N_n &= \mathrm{Card}\left(\{X_1,\dots,X_n\} \cap [0,a[\right) + \mathrm{Card}\left(\{X_1,\dots,X_n\} \cap [a,+\infty[\right) \\ &\leqslant a + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(X_k). \end{aligned}$$
2. Utiliser l'inégalité précédente avec $a = n$.
3. Utiliser l'inégalité précédente avec $a = \sqrt{n}$ et remarquer que
$$mP(X \geqslant m) = m\sum_{k=m}^{+\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=m}^{+\infty} kP(X=k) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Exercice 45 : On déduit de la première question que N est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre 2^{-r}, donc N suit une loi binomiale de paramètre $(n, 2^{-r})$.

Exercice 46 :

1. On trouve $H(X) = -\dfrac{p\ln(p) + (1-p)\ln(1-p)}{p}$.
2. (a) Il suffit de vérifier que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
   (b) En utilisant la question (a), si $p_n \leqslant n^{-3}$, alors on a $\phi(p_n) \leqslant n^{-3/2}$, tandis que si $p_n \leqslant n^{-3}$, alors $\phi(p_n) \leqslant 3p_n\ln(n)$.
   (c) Utiliser que $\max\left(n^{-3/2}, 3p_n\ln(n)\right) \leqslant n^{-3/2} + 3np_n$.

Exercice 47 : On a $P(X=Y)=1/n$ et $P(X\leqslant Y)=\dfrac{n+1}{2n}$.

Exercice 48 : Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 49 : On trouve $P(X<Y)=\dfrac{pq}{p+q-pq}$ et $P(X\leqslant Y)=\dfrac{p}{p+q-pq}$.

Exercice 50 : On a $P(X=Y)=\dfrac{p}{1-p}(\mathrm{e}^{-\lambda p}-\mathrm{e}^{-\lambda})$.

Exercice 51 :

(i) On a $S(\Omega)=[\![2,2n]\!]$ et pour tout $k\in S(\Omega)$, on a

$$P(S=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{n^2} & \text{si} \quad k\in[\![2,n]\!]\\ \dfrac{2n-k+1}{n^2} & \text{si} \quad k\in[\![n+1,2n]\!].\end{cases}$$

(ii) La variable aléatoire S suit la loi $\mathscr{B}(n+m,p)$.

(iii) La variable aléatoire S suit la loi $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

(iv) On a $S(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et pour tout $k\in S(\Omega)$, on a

$$P(S=k)=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

Exercice 52 : On a $M(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad P(M=k)=\frac{2k-1}{n^2}.$$

Par un calcul direct, on en déduit que

$$\mathrm{E}(M)=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.$$

Exercice 53 :

1. Pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, on a $P(M_n=k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n$.
2. La suite $(P(M_n=N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.
3. Avec une somme de Riemann, on a

$$\mathrm{E}(M_n)=N-\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{nN}{n+1}.$$

Exercice 54 : La variable Z suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^n$.

Exercice 55 :

1. En notant $q=1-p$, on obtient que $\mathrm{E}(U_n)=\dfrac{1}{1-q^n}$.
2. En utilisant une comparaison série-intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty}1-\left(1-q^t\right)^n\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{E}(V_n)\leqslant1+\int_0^{+\infty}1-\left(1-q^t\right)^n\mathrm{d}t.$$

En utilisant le changement de variable $u=1-q^t$, on conclut que

$$\mathrm{E}(V_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{\ln(q)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Exercice 56 :

1. On a $P(X\leqslant n)=1-(1-p)^n$ et $P(M\leqslant n)=\left(1-(1-p)^n\right)^2$.
2. En notant $q=1-p$, on en déduit que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(M=n)=(q^2-1)q^{2n-2}+2pq^{n-1}.$$

3. On obtient que $\mathrm{E}(M)=\dfrac{3-2p}{p(2-p)}$.

Exercice 57 :

1. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a $P(Z=k)=\dfrac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}$.
2. La variable aléatoire M suit la loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^2$.
3. Les variables aléatoires D et M sont indépendantes.

Exercice 58 : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$P(Z=k) = \begin{cases} \dfrac{pq(1-p)^k}{1-(1-p)(1-q)} & \text{si} \quad k \geqslant 0 \\ \dfrac{pq(1-q)^{-k}}{1-(1-p)(1-q)} & \text{si} \quad k < 0. \end{cases}$$

Exercice 59 : On a $P(X=n) = (n+1)(1-p)^n p^2$ et $\mathrm{E}(X) = \dfrac{2(1-p)}{p}$. On trouve que les variables aléatoires $Y+1$ et $Z+1$ suivent la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 60 : On trouve que A_i suit la loi $\mathscr{G}(p)$.

Exercice 62 : En dénombrant et en majorant la probabilité de l'évènement complémentaire, on trouve que la limite est 1.

Exercice 63 : On trouve $P(X \neq Y) = \dfrac{p+q-2pq}{p+q-pq}$.

Exercice 65 : On trouve $P(X \neq Y) = 1-(pq)^n \dbinom{2n}{n}$.

Exercice 67 : Utiliser l'espérance pour calculer $P(Z_n = 1)$.

Exercice 68 : L'espérance de Z est maximale si $|a - n/2|$ est minimal.

Exercice 69 : On trouver avec la linéarité de l'espérance que $\mathrm{E}(Z) = m/n$.

Exercice 71 : On trouve que f est presque sûrement constante.

Exercice 72 : On a $\mathrm{E}(X) = 1$, $\mathrm{V}(X) = 2/3$, $E(N) = 8/9$ et $\mathrm{V}(N) = 26/81$.

Exercice 73 : On a $\mathrm{E}(U) = 15/8$ et $\mathrm{E}(V) = 25/8$.

Exercice 75 : On a $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 76 :

1. La loi du couple (U,V) est donnée par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P((U=i) \cap (V=j)) = \begin{cases} 2p^2 q^{i+j} & \text{si} \quad i < j \\ p^2 q^{i+j} & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i > j. \end{cases}$$

2. La loi de U et la loi de V sont données par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U=k) = p(1+q)q^{2k} \quad \text{et} \quad P(V=k) = p^2 q^{2k} + 2pq^k(1-q^k).$$

3. Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.
4. En utilisant que $U+1$ suit une loi géométrique et que $U+V = X+Y$, on a

$$\mathrm{E}(U) = \frac{q^2}{1-q^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(V) = \frac{(1-p)(3-p)}{p(2-p)}.$$

Exercice 77 : On trouve que X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, que Y suit la loi $\mathscr{B}(n,p(1-p))$ et que Z suit la loi $\mathscr{B}(n,p(2-p))$.

Exercice 78 : On trouve Z suit la loi $\mathscr{B}(n,1/4+3p/4)$.

Exercice 79 : On trouve $a = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-2}$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$P(X=k) = P(Y=k) = \frac{2k}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad \mathrm{E}(X) = \frac{2n+1}{3}.$$

On a $P(X=Y) = \dfrac{2(2n+1)}{3n(n+1)}$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a $P(M=k) = \dfrac{4k^3}{[n(n+1)]^2}$.

Exercice 80 : On trouve $a = 1$ et X suit la loi $\mathscr{G}(1/2)$.

Exercice 81 :

1. On trouve que $a = 1/8$.
2. On a $P(X=k) = P(Y=k) = \dfrac{k+1}{2^{k+2}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. On a $P((X=0)\cap(Y=0)) = 0 \neq P(X=0)P(Y=0)$.
4. On a $P(X=Y) = 1/9$.

Exercice 82 :

1. On trouve que $a = 1/2$.
2. On a $P(Y=j) = p(1-p)^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
3. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$ que

$$P(X=i) = \left(1 - \frac{1-p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^i.$$

Exercice 83 : On trouve $a = \mathrm{e}^{-2}$ et X suit la loi $\mathscr{P}(1)$.

Exercice 84 :

1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = P(Y=k) = \frac{2k+1}{2^{k+1}k!\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

2. On a $P((X=0)\cap(Y=0)) = 0 \neq P(X=0)P(Y=0)$.
3. On a par un calcul direct que $\mathrm{E}\left(2^{X+Y}\right) = 2\mathrm{e}$.

Exercice 85 : On trouve $a = \mathrm{e}^{-1}$ et $E(X) = E(Y) = 1$.

Exercice 86 : On a X suit la loi $\mathscr{P}(p\lambda)$.

Exercice 88 : On a $P(X=0) = \frac{q}{1+q}$ et $P(X=n) = \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On trouve $\mathrm{E}(X) = 1$.

Exercice 89 : On a $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(N)$ et $\mathrm{V}(S) = \mathrm{V}(X_1)\,\mathrm{E}(N) + E(X_1^2)\,\mathrm{V}(N)$.

Exercice 90 : En développant $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_N) = 0$, on obtient que

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{n}{N^2} \quad \text{et} \quad \rho(X_i, X_j) = -\frac{1}{N-1}.$$

Exercice 91 :

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $P(V=k) = \dfrac{2k-1}{n^2}$ et $P(U=k) = \dfrac{2(n-k)+1}{n^2}$.
2. On a $\mathrm{E}(U) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ et $\mathrm{E}(V) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.
3. On a $\mathrm{Cov}(U,V) = \dfrac{(n+1)^2(n-1)^2}{36n^2}$.

Exercice 92 :

1. Les variables aléatoires X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
2. On trouve $\mathrm{Cov}(X,Y) = -\dfrac{n+1}{12}$.
3. La loi de Z est donnée par $Z[\Omega) = [\![1, n-1]\!]$ et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad P(Z=k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Exercice 94 :

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i < j$, on a

$$P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{2}{n(n-1)}.$$

2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $P(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$ et $P(Y=k) = \dfrac{2(k-1)}{n(n-1)}$.
3. On a $\mathrm{E}(X) = \dfrac{n+1}{3}$ et $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{2(n+1)}{3}$.
4. On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{(n+1)(n-2)}{36}$.

Exercice 95 : On trouve $a = \dfrac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2}$ et $b = (1-a)m_S$.

Exercice 96 : Le couple cherché est

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathrm{V}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{Cov}(X,Y)\,\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}.$$

Exercice 98 : Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on trouve $n = 2000$.

Exercice 101 : L'inégalité est meilleure si et seulement si $\varepsilon \leqslant \sigma$.

Exercice 103 : On trouve λ^r et $r!\dfrac{(1-p)^{r-1}}{p^r}$.

Exercice 104 : On a $G_S(t) = \left(\dfrac{1+t}{2}\right)^{2n}$ et S suit la loi $\mathscr{B}(2n, 1/2)$.

Exercice 105 :

1. La fonction génératrice de X est

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad G_X(t) = \frac{(1-p)^{n+1}}{(1-pt)^{n+1}}.$$

2. On en déduit que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{(n+1)p}{1-p}$ et $\mathrm{V}(X) = \dfrac{(n+1)p}{(1-p)^2}$.

Exercice 106 : On a $\mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(X_1)\,\mathrm{E}(N)$ et $\mathrm{V}(S) = \mathrm{V}(X_1)\,\mathrm{E}(N) + E(X_1^2)\,\mathrm{V}(N)$.

Exercice 108 : On a $\mathrm{E}(X) = 2$ et $\mathrm{V}(X) = 3/2$.

Exercice 109 : On aurait $G_S = G_X \cdot G_Y$. Le polynôme G_S admet une unique racine réelle qui est nulle. Les polynômes G_X et G_Y admettent une racine réelle non nulle, d'où la contradiction.