

Limites et continuité des fonctions

Partie I Limite d'une fonction

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 (i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & (ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x - 1}, \\
 (iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}, & (iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}, \\
 (v) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}, & (vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \\
 (vii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1+x/2)}{x^2}, & (viii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \\
 (ix) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}, & (x) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x \\
 (xi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x, & (xii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + \sqrt[3]{4x} - \sqrt{4x+1}}{x - 2}.
 \end{array}$$

Exercice 2 : Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes.

$$(i) \ln(x) - e^x, \quad (ii) \frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}, \quad (iii) \frac{\ln(1 + e^x)}{\sqrt{x}}, \quad (iv) \frac{\exp(\sqrt{x}) + 1}{\exp(x^2) + 1}.$$

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes.

$$\begin{array}{llll}
 (i) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x, & (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}, & (iii) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}, & (iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}, \\
 (v) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}, & (vi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{(3^x)}}{3^{(2^x)}}, & (vii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}, & (viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)^{\frac{\ln(x)}{x}}.
 \end{array}$$

Exercice 4 : Déterminer les limites suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x}, & (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}, & (iii) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), \\
 (iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin(\ln(x)), & (v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos(x)}{x + \sin(x)}, & (vi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) + \sin^2(x)}{x}.
 \end{array}$$

Exercice 5 : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Étudier la limite en 0^- , en 0^+ , en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 6 : Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto x^a \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Exercice 7 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Exercice 8 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 9 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est croissante, alors la fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ est croissante.

Partie II Continuité d'une fonction en un point

Exercice 10 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}.$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction continue.

Exercice 11 : Étudier si les fonctions $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous se prolongent à $\mathbb{R}$ par continuité.

$$(i) \quad f : x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad (ii) \quad g : x \mapsto \cos(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 12 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (ax)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ae^{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-5x+5}-a}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{b(x\sqrt{x}-1)}{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la fonction f se prolonge par continuité en 1.

Exercice 14 : Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 15 : Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

Exercice 16 : Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 17 : Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{x^n}{n!} \right).$$

Exercice 18 - Fonction de Dirichlet : Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Exercice 19 - Fonction de Thomae : Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \text{ et } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

Exercice 20 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \inf\{|x - a| \in \mathbb{R} \mid a \in A\}.$$

Montrer que la fonction f est Lipschitzienne.

Exercice 21 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction f est continue.

Exercice 23 : Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et périodique n'admettant pas de plus petite période strictement positive, alors f est constante.

Exercice 24 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) < g(x)$ pour tout nombre $x \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'on a pas nécessairement $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 25 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour tout $x \in]a, b[$, on définit $\delta(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

1. Montrer que $E_n = \{x \in]a, b[\mid \delta(x) \geq n^{-1}\}$ est fini.
2. En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

Partie III Continuité d'une fonction sur un intervalle

III.A - Image d'un intervalle par une fonction continue

Exercice 27 : Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue, alors f est constante.

Exercice 28 : Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{Q}$ est continue, alors f est constante.

Exercice 29 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout élément $x \in I$. Montrer que f est constante.

Exercice 30 : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ des fonctions continues telles que

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| = |g(x)|.$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 31 : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $p, q > 0$. Montrer que

$$\exists c \in [a, b], \quad pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$$

Exercice 32 : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que

$$(\forall x \in I, \quad f(x) > g(x)) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in I, \quad g(x) > f(x)).$$

Exercice 33 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P pour que l'application $f : t \mapsto P(t)$ soit surjective.

Exercice 34 : Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ est surjective.

Exercice 35 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice 36 : Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation $f \circ f = -\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 37 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue vérifiant $f \circ f = \text{Id}$. Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 38 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction f est continue si et seulement si $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Exercice 39 : Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

III.B - Image d'un segment par une fonction continue

Exercice 40 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 41 : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un segment I telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad f(x) + \alpha \leq g(x).$$

Exercice 42 : Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un segment I telles que $0 < f(x) < g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que

$$\exists \alpha > 1, \quad \forall x \in I, \quad \alpha f(x) \leq g(x).$$

Exercice 43 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.

1. Montrer que f est bornée et qu'elle atteint ses bornes.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x+t) = f(x)$.

Exercice 44 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique où $T > 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\text{Im}(f) = f([c, c + T/2])$.

Exercice 45 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 46 : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que la fonction f est bornée.
2. Montrer que la fonction f admet un maximum ou un minimum sur $[0, +\infty[$.

Exercice 47 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\exists a \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad f(a + 1/n) = f(a).$$

2. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon \in]0, 1]$ tel que

$$\forall T \in]0, \varepsilon], \quad \exists a \in [0, 1 - \varepsilon], \quad f(a + T) = f(a).$$

Exercice 48 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n points $A_1, \dots, A_n$ sur le cercle unité.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n . Calculer l'intégrale

$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-int} dt.$$

2. Montrer qu'il existe un point M sur le cercle unité tel que

$$A_1 M \times \dots \times A_n M = 1.$$

Exercice 49 : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Exercice 50 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

Exercice 51 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On définit la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(t) = \sup_{x \in [0, 1]} (f(x) + tg(x))$$

Montrer que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 52 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq g(x) + m$.
2. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f^{\circ n}(x) \geq g^{\circ n}(x) + n \cdot m.$$

3. Est-il possible d'avoir $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 53 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que tout nombre réel admet une infinité d'antécédent par f .

Exercice 54 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que si tout réel possède au plus deux antécédents par f , alors il existe un réel possédant exactement un antécédent.

III.C - Points fixes d'une fonction continue sur un intervalle

Exercice 55 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 56 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 57 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que la fonction f admet un unique point fixe.

Exercice 58 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que la fonction $f^{\circ n}$ admet un point fixe si et seulement si f admet un point fixe.

Exercice 59 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue tel que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} ax$ avec $0 < a < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 60 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment I telle que

$$\forall (x, y) \in I^2 \text{ avec } x \neq y, \quad |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto |x - f(x)|$ admet un minimum sur I .
2. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 61 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. On note E l'ensemble des points fixes de f .

1. Montrer que E est non vide.
2. Montrer que $a = \inf(E)$ et $b = \sup(E)$ sont des éléments de E .
3. Montrer que $g(E) \subset E$.
4. En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 62 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que g admet un point fixe $a \in [0, 1]$.
2. On suppose que $f(x) > g(x)$ pour tout élément $x \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(f^{\circ n}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 63 : On considère une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Montrer que $f(rx) = rf(x)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
 - (i) La fonction f est continue en un point de $\mathbb{R}$.
 - (ii) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (iii) La fonction f est lipschitzienne.
 - (iv) La fonction f est majorée sur un intervalle de longueur non nulle.
 - (v) Il existe un intervalle I de longueur non nulle tel que l'ensemble $f(I)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

III.D - Continuité et équations fonctionnelles

Exercice 64 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Exercice 65 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x).$$

Exercice 66 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x^2).$$

Exercice 67 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \cos(x).$$

Exercice 68 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 69 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

Exercice 70 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 71 : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x)f(y). \quad (R)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (R).
 - (a) Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction paire ou une fonction impaire.
 - (b) En utilisant la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(e^t)$, déterminer une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 72 : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y). \quad (R)$$

1. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la relation (R), alors f est une fonction paire.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle et continue vérifiant (R).
 - (a) Montrer que la fonction f ne s'annule pas.
 - (b) Montrer que la fonction f est strictement positive.
 - (c) En utilisant la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \ln(f(\sqrt{t}))$, déterminer une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 73 : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \quad (R)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (R) telle que $f(0) = f(1) = 0$.
 - (a) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que la fonction f est 1-périodique.
 - (c) En déduire que f est nulle.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 74 : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2. \quad (R)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle et continue vérifiant (R).
 - (a) Montrer que $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$.
 - (b) Montrer que la fonction f ne s'annule pas.
 - (c) Montrer que f est une fonction paire.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (R) telle que $f(0) = 1$.
 - (a) Montrer que la fonction f est strictement positive.
 - (b) Montrer que $f(nx) = f(x)^{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Partie IV Continuité uniforme

Exercice 75 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée. Montrer que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $g \circ f$ est une fonction uniformément continue.

Exercice 76 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|f(x)| \leq a|x| + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Quelles sont les fonctions polynomiales uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 77 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 78 : Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est périodique et continue, alors elle est uniformément continue.

Exercice 79 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 80 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que

$$\forall x > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 81 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max f([x, x+1]).$$

1. Montrer que si f est uniformément continue, alors g est continue.
2. Montrer que g est continue.

— Solutions partielles —

Exercice 1 : Les limites sont les suivantes.

$$\begin{array}{llll} (i) & 4, & (ii) & 12, & (iii) & 3, & (iv) & 0, \\ (v) & 10, & (vi) & 1, & (vii) & -\frac{1}{8}, & (viii) & \frac{3}{2}, \\ (ix) & 1, & (x) & -\frac{1}{2}, & (xi) & 0, & (xii) & -\frac{1}{3}. \end{array}$$

Exercice 2 : Les limites sont les suivantes.

$$(i) -\infty, \quad (ii) 0, \quad (iii) +\infty, \quad (iv) 0.$$

Exercice 3 : Les limites sont les suivantes.

$$\begin{array}{llll} (i) & 1, & (ii) & 0, & (iii) & 0, & (iv) & 1, \\ (v) & 1, & (vi) & +\infty & (vii) & +\infty, & (viii) & 1. \end{array}$$

Exercice 4 : Les limites sont les suivantes.

$$\begin{array}{lll} (i) & 0, & (ii) & 0, & (iii) & 0, \\ (iv) & 0, & (v) & 1, & (vi) & 0. \end{array}$$

Exercice 13 : La condition est $(a, b) = (1, -1)$.

Exercice 16 : L'ensemble des discontinuités de f est $\{1/n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$.

Exercice 17 : On a $f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 18 : La fonction f est totalement discontinue.

Exercice 19 : L'ensemble de continuité de f est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 24 : Considérer $f(x) = 0$ et $g(x) = |x - \sqrt{2}|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 25 : Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ sont tels que $x < a < b < y$, alors on obtient avec l'hypothèse et des suites de rationnels que $f(x) \leq f(a) < f(b) \leq f(y)$.

Exercice 34 : Soit $Z = \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On cherche un nombre $z = r e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = Z$, ce qui équivaut à

$$r e^{r \cos(\theta)} = \rho \quad \text{et} \quad \theta + r \sin(\theta) = \varphi [2\pi].$$

En restreignant la recherche θ dans l'intervalle $]0, \pi[$ et en supposant que $\varphi > \pi$, il suffit de justifier l'existence d'une solution $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$ vérifiant

$$r = \frac{\varphi - \theta}{\sin(\theta)}.$$

On conclut en injectant cette relation dans la première équation et en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'un $\theta \in]0, \pi[$ satisfaisant les équations.

Exercice 36 : La fonction f est bijective et continue, donc elle est monotone.

Exercice 37 : La fonction f est continue et injective, donc elle est strictement monotone. Comme elle est surjective, elle est nécessairement strictement croissante. On conclut en raisonnant par l'absurde en supposant qu'il existe un élément $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > x$ ou $f(x) < x$.

Exercice 39 : Remarquer que la fonction $h = f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est constante.

Exercice 43 : Montrer que $g : x \mapsto f(x+t) - f(x)$ change de signe.

Exercice 44 : On peut écrire $f([0, T]) = [f(a), f(b)]$ avec des éléments $a, b \in [0, T]$. Si $a < b$, alors $[a, a + T/2]$ ou $[a + T/2, a + T]$ convient. L'autre cas est analogue.

Exercice 47 :

1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires en remarquant que

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

2. Si $c \in]0, 1[$ est un réel tel que $f(c)$ est un extremum de f sur $[0, 1]$, il suffit de poser $\varepsilon = \min(c, 1 - c)$ et d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 48 : Notons $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ les affixes respectives de $A_1, \dots, A_n$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = |P(e^{it})| \quad \text{avec} \quad P = (X - z_1) \cdots (X - z_n) \in \mathbb{C}[X].$$

L'application f est continue et en utilisant la question 1, on a que $\sup_{t \in \mathbb{R}} (f(t)) \geq 1$, ce qui permet de conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 54 : Considérer deux éléments distincts $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = f(b)$. Le maximum ou le minimum de f sur $[a, b]$ s'écrit $f(c)$ avec $c \in]a, b[$ et il admet un unique antécédent.

Exercice 64 : Les solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 65 : Les solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 66 : Les solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 67 : Les solutions sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\left(f(0) = C \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = C \frac{\sin(x)}{x} \right) \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 68 : Les solutions sont les fonctions linéaires.

Exercice 69 : Les solutions de l'équation fonctionnelle sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 70 : En considérant la fonction $t \mapsto f(e^t)$, on trouve que les solutions sont les fonctions $x \mapsto a \ln(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 71 : Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions paires ou impaires de la forme $f_a(x) = x^a$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 72 :

1. Si f n'est pas nulle, on peut choisir $y \in \mathbb{R}$ telle que $f(y) \neq 0$.
2. On a $f(\sqrt{2}x) = f(x)^2$ pour tout élément $x \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que si f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}_+$, alors f s'annule en $x_0/\sqrt{2}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de l'application f , on en déduit que $f(0) = 0$, puis que f est nulle avec (R), ce qui est impossible. On en déduit que f est de signe constant, donc f est strictement positive car $f(0) = 1$.
3. Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{ax^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 73 :

1. La fonction f est continue et périodique, donc elle est bornée. On en déduit avec (a) que la fonction f nécessairement est nulle.
2. En se ramenant au cas précédent, on conclut que les solutions sont les fonctions affines.

Exercice 74 :

1. On a $f(0)f(x) = f(x/2)^4$ pour tout élément $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que si f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}_+$, alors f s'annule en $x_0/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par continuité de l'application f , on en déduit que $f(0) = 0$, ce qui est impossible.
2. Montrer la relation par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
3. Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $x \mapsto \varepsilon a^{x^2}$ avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.