

— Intégration sur un segment —

Partie I Calcul de primitives et d'intégrales

I.A - Généralités

Exercice 1 : Calcul les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt, & (ii) \int_4^5 \frac{dt}{t \ln(t^2)}, & (iii) \int_1^3 \frac{t-2}{\sqrt{t(4-t)}} dt, \\
 (iv) \int_0^{1/2} \frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, & (v) \int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{e^t+1}} dt, & (vi) \int_0^{\pi/2} \cos(t) \sin(t) dt, \\
 (vii) \int_0^{\pi/4} \tan(t) dt, & (viii) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cotan(t) dt, & (ix) \int_0^{\pi} \cos^3(t) \cos(3t) dt, \\
 (x) \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2(t/2)}{t - \sin(t)} dt, & (xi) \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + t + 1}, & (xii) \int_0^1 2^t dt, \\
 (xiii) \int_0^1 \frac{dt}{1+e^{-t}}, & (xiv) \int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t)}, & (xv) \int_1^2 \left(\frac{t}{e}\right)^t \ln(t) dt.
 \end{array}$$

Exercice 2 - Rationnelles : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) x \mapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, & (ii) x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 9}, & (iii) x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 3}, \\
 (iv) x \mapsto \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}, & (v) x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4}, & (vi) x \mapsto \frac{x}{x^2 - 4x + 5}.
 \end{array}$$

Exercice 3 - Rationnelle : Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Déterminer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2 \cos(\theta)x + 1}.$$

Exercice 4 - Rationnelles : Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - 4)(x + 1)}, & (ii) \int_0^1 \frac{x}{x^3 + 1} dx, & (iii) \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)(x - 2)^2} dx, \\
 (iv) \int_0^{1/2} \frac{2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} dx, & (v) \int_0^1 \frac{x^3}{(x + 1)^3} dx, & (vi) \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)(x^3 + 1)} dx.
 \end{array}$$

Exercice 5 : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t - \lambda}$.

Exercice 6 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \neq 1$. Calculer l'intégrale

$$I_\lambda = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos(x) + \lambda^2}} dx.$$

Exercice 7 : Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer l'intégrale $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt$.

Exercice 8 : Calculer l'intégrale $I_{m,n} = \int_m^n [x] dx$ pour $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.

Exercice 9 : Calculer l'intégrale $I_a = \int_0^1 \min(x, a) dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 - Formule de Cauchy : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que

$$P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) dt.$$

Exercice 11 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{it}) e^{it} dt.$$

I.B - Intégration par parties

Exercice 12 : Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} (i) \int_0^1 \ln(1+t^2) dt, & \quad (ii) \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt, & \quad (iii) \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin}(t) dt, \\ (iv) \int_0^1 t \operatorname{Arctan}(t) dt, & \quad (v) \int_0^1 (t^2+t+1) e^{2t} dt, & \quad (vi) \int_0^\pi t^2 \cos(2t) dt, \\ (vii) \int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)} dt, & \quad (viii) \int_0^1 t \operatorname{Arctan}^2(t) dt, & \quad (ix) \int_0^1 \frac{t \ln(t)}{(t^2+1)^2} dt. \end{aligned}$$

Exercice 13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_n = \int_1^e t^n \ln(t) dt$.

Exercice 14 : Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x) \ln(1 + \cos(x))$.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une primitive de $x \mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 16 : Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} (i) \int_0^\pi e^{-t} \cos(t) dt, & \quad (ii) \int_0^{2\pi} e^{-t} \sin^2(t) dt, \\ (iii) \int_0^\pi t e^t \sin(t) dt, & \quad (iv) \int_0^1 e^{\operatorname{Arccos}(t)} dt. \end{aligned}$$

Exercice 17 : Calculer une primitive de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

$$\begin{aligned} (i) f(t) &= e^t \sin(t), & (ii) f(t) &= e^{2t} \cos(3t), \\ (iii) f(t) &= e^{-t} \cos(t)^2, & (iv) f(t) &= t e^t \cos(t). \end{aligned}$$

Exercice 18 : On considère un couple non nul $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer une primitive des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{at} \cos(bt) \quad \text{et} \quad g(t) = e^{at} \sin(bt).$$

Exercice 19 : Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$ et de $x \mapsto \sin(\ln(x))$.

Exercice 20 - Rationnelle : Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

I.C - Changement de variable

Exercice 21 : Calculer les intégrales suivantes.

$$\begin{aligned} (i) \int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt, & \quad (ii) \int_1^e \frac{\ln(t)}{t + t \ln^2(t)} dt, \\ (iii) \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t+2t}}, & \quad (iv) \int_1^e \frac{dt}{t \sqrt{\ln(t)+1}}. \end{aligned}$$

Exercice 22 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i) x \mapsto \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2}, \quad (ii) x \mapsto \frac{x^2}{x^6 - 4x^3 + 5}.$$

Exercice 23 : Calculer l'intégrale $\int_0^1 (1+x^2)^{-2} dx$.

Exercice 24 - Trigonométriques : Calculer les intégrales suivantes.

$$(i) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2(t)} dt, \quad (ii) \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} dt,$$

$$(iii) \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1 + \sin^2(t)}, \quad (iv) \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 + \sin(t)} dt.$$

Exercice 25 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i) t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}, \quad (ii) t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}.$$

Exercice 26 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i) t \mapsto \frac{e^{2t}}{e^t + 1}, \quad (ii) t \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(t)}, \quad (iii) t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)},$$

$$(iv) t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2t}}}, \quad (v) t \mapsto \sqrt{e^t - 1}, \quad (vi) t \mapsto \frac{1}{\operatorname{th}(t)}.$$

Exercice 27 - Abéliennes : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i) t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}, \quad (ii) t \mapsto \frac{1}{1 - \sqrt{t+2}}, \quad (iii) t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}.$$

Exercice 28 - Abéliennes : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i) t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}, \quad (ii) t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}.$$

Exercice 29 - Abéliennes : Calculer les intégrales suivantes.

$$(i) \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt, \quad (ii) \int_1^{5/2} \sqrt{-t^2+2t+8} dt,$$

$$(iii) \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t^2} dt, \quad (iv) \int_1^2 t \sqrt{t^2-2t+5} dt.$$

Exercice 30 : Pour tout $x > 0$, déterminer la fonction F définie par

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(3 + e^t)\sqrt{e^t - 1}} dt.$$

I.D - Utilisation de symétrie pour calculer les intégrales

Exercice 31 : Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt.$$

Exercice 32 : Calculer les intégrales suivantes.

$$(i) I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx, \quad (ii) J = \int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 + \sin(x)}.$$

Exercice 33 : Montrer que

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t)) dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt$$

et en déduire la valeur de

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(t)) dt.$$

Exercice 34 : Calculer les intégrales suivantes.

$$(i) \int_{1/2}^2 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx, \quad (ii) \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \operatorname{Arctan}(x) dx, \quad (iii) \int_{-1}^1 \operatorname{Arctan}(e^x) dx.$$

Partie II Suites définies par une intégrale

Exercice 35 : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(m, n)^2 \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)^m (t - \beta)^n dt.$$

Exercice 36 : On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) dt.$$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 37 : On considère la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .
2. Montrer que $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante.
4. En déduire un équivalent de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 38 : On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .
2. Calculer I_1 , I_2 et I_3 .
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 39 : On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Calculer $I_{n+1} + I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 40 : Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, calculer l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln^p(t) dt.$$

Exercice 41 : Déterminer la limite des suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^n \frac{dx}{1+e^{nx}}.$$

Exercice 42 : Déterminer un développement asymptotique à la précision n^{-1} de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}.$$

Exercice 43 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continue vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 f(t)^n dt.$$

Exercice 44 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Exercice 45 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $r \in \mathbb{N}$. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Déterminer un développement asymptotique à la précision $o(n^{-r-1})$ de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 46 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{1/n} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Exercice 47 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

$$(i) \quad u_n = \int_0^1 f(t^n) dt, \quad (ii) \quad v_n = (n+1) \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

Exercice 48 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt.$$

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si f est une fonction en escalier, alors $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Partie III Propriétés générales sur les intégrales

III.A - Généralités

Exercice 49 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. Si f est impaire, que peut-on dire sur la parité des primitives de f ?
2. Si f est paire, que peut-on dire sur la parité des primitives de f ?

Exercice 50 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $T > 0$. Montrer que la fonction f est T -périodique si et seulement si la valeur de l'intégrale de f sur un segment de longueur T ne dépend pas du segment choisi.

Exercice 51 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que ses primitives soient des fonctions périodiques.

Exercice 52 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe une unique primitive $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f vérifiant

$$\int_0^1 F(t) dt = 0.$$

Exercice 53 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \int_a^b f(t) dt = 0.$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 54 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^1 f(t) e^{tx} dt.$$

Montrer que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 55 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^b |t - x| f(t) dt.$$

Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + x^2}.$$

Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x^2$.

Exercice 57 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$xf(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt.$$

3. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, on a

$$xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt.$$

Dans quel cas a-t-on une égalité?

Exercice 58 : Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive.

Exercice 59 - Inégalité de Hermite-Hadamard : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Exercice 60 : Soit $A \geq 0$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq A|f(x)|.$$

1. Montrer que $|f(x)| \leq \frac{(Ax)^n}{n!} \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire que $f = 0$.

Exercice 61 - Lemme de Grönwall : Soient $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et un nombre $b \in \mathbb{R}$. On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq b + \int_0^x a(t) f(t) dt.$$

Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \leq b \exp\left(\int_0^x a(t) dt\right).$$

III.B - Utilisation de la propriété d'annulation

Exercice 62 : Déterminer les fonctions continues $f : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$ vérifiant

$$\int_a^b f(t) dt = b - a.$$

Exercice 63 : Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vérifiant

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f^2(t) dt.$$

Exercice 64 : Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = \int_0^1 f^3(t) dt = \int_0^1 f^4(t) dt.$$

Exercice 65 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 66 : Soient $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = \int_0^\pi f(t) \cos(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0, \pi[$.

Exercice 67 : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

Montrer que la fonction f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

Exercice 68 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont on note m le minimum et M . Montrer que

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f(t)^2 dt \leq -mM.$$

Exercice 69 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), \quad \int_0^1 f(t)g(t) dt = 0.$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 70 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. On note

$$\forall x \in [0, 1], \quad F(x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto F(x)/x^2$ se prolonge par continuité en 0.
2. En déduire que F s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.

Exercice 71 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

si et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 72 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

si et seulement si il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $f = e^{i\theta} g$.

III.C - Intégrales où les bornes sont des fonctions

Exercice 73 : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On note

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t) dt.$$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g$.
3. Déterminer toutes les solutions de cette équation différentielle.

Exercice 74 : Montrer que $\int_e^x \ln(\ln(t)) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln(\ln(x))$.

Exercice 75 : Déterminer les limites suivantes.

$$\begin{aligned} (i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\exp(t)}{t} dt, & \quad (ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\exp(1/t)}{t} dt, \\ (iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt, & \quad (iv) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{1 - \cos(t)}{t^3} dt. \end{aligned}$$

Exercice 76 : Soient $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Exercice 77 : Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

Exercice 78 : Étudier la fonction $f :]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)}.$$

Exercice 79 : On considère la fonction $f :]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
2. Étudier la fonction F sur $[0, +\infty[$.

Exercice 80 : Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t}) dt.$$

Exercice 81 : Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2yf(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt.$$

Exercice 82 : Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t) dt.$$

Exercice 83 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell.$$

Exercice 84 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ vérifiant $f(0) = 0$ et $0 \leq f' \leq 1$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \geq \int_0^x f(t)^3 dt.$$

Exercice 85 - Inégalité de Tchebychev : Soient $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et croissantes. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) \left(\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \right) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t)g(t) dt.$$

Exercice 86 - Formules de la moyenne : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues.

- On suppose que la fonction g est positive
 - Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

- En déduire que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt = \frac{f(0)}{2}.$$

- On suppose que la fonction f est positive, décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt.$$

Partie IV Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 87 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions positives et continues telles que $f(x)g(x) \geq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right) \left(\int_0^1 g(t) dt \right) \geq 1.$$

Exercice 88 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

- Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{m+n}^2 \leq I_{2m} I_{2n}$.
- Étudier le cas d'égalité.

Exercice 89 : On note E l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

- Montrer que si $f \in E$, on a l'inégalité

$$\left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right) \geq (b-a)^2.$$

- Étudier le cas d'égalité.

Exercice 90 : On considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'ensemble

$$E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = a, f(1) = b\}.$$

Déterminer le nombre

$$m = \inf_{f \in E} \int_0^1 f'(t)^2 dt$$

et les éventuelles fonctions réalisant cette borne inférieure.

Exercice 91 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et non nulle. On considère les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 f(t)^n dt \quad \text{et} \quad u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 92 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(a) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)|^2 \leq (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

2. En déduire l'inégalité

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Exercice 93 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(1) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2 dt.$$

Partie V Sommes de Riemann

Exercice 94 : Déterminer les limites des suites de terme général suivant.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}, & (ii) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \\ (iii) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}, & (iv) \quad & \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Exercice 95 : Soit $a \geq 1$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^a}.$$

Exercice 96 : Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})} (1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n)^{1/n^2}.$$

Exercice 97 : Déterminer un équivalent des suites de terme général suivant.

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n \sqrt{k}, \quad (ii) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}.$$

Exercice 98 : Déterminer les couples $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a \neq b$ tels que

$$\exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\sum_{k=0}^n k^a \right)^p = \left(\sum_{k=0}^n k^b \right)^q.$$

Exercice 99 : Déterminer la limite de la suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Exercice 100 : Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est déterminée sa limite.

Exercice 101 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2 + n^2} \right)^n.$$

1. Pour tout réel $x \geq 0$, montrer que $|\ln(1+x) - x| \leq x^2/2$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 102 : On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right), \quad v_n = \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right).$$

1. Pour tout réel $x \geq 0$, montrer que $|\sin(x) - x| \leq x^3/6$.
2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 103 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{2 \operatorname{Arctan}(k)}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a l'égalité

$$\ln(1 - \lambda \operatorname{Arctan}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\lambda x + O(x^2).$$

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 104 : Déterminer la limite de la suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}.$$

Exercice 105 : Déterminer la limite de la suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Exercice 106 - Intégrale de Poisson : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Calculer $\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt$.

Exercice 107 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2.$$

Exercice 108 - Inégalité de Jensen : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .

1. Montrer que si $g : [a, b] \rightarrow I$ est une fonction continue, alors

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g(t)) dt.$$

2. Montrer que si $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction

$$x \mapsto \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^x dt \right)^{1/x}$$

est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 109 : Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt.$$

Partie VI Formules de Taylor

VI.A - Formule de Taylor avec reste intégral

Exercice 110 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin(2\pi n!e)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n!e - \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \in \mathbb{Z}.$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 111 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Exercice 112 : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \frac{1}{p!} \int_a^x (x-t)^p f(t) dt.$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur $[a, b]$ et vérifie $g^{(p+1)} = f$.
2. On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit $g_p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad g_p(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1) \cdots (k+p)} x^{k+p}.$$

- (a) Déterminer une expression simple de $g_p^{(p+1)}$.
- (b) En déduire une nouvelle expression de $g_p(1)$.

Exercice 113 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 114 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f , calculer

$$I = \int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Exercice 115 : Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = g$.

Exercice 116 : On désigne par Ω l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 1$.

1. Montrer que

$$\inf_{f \in \Omega} \left(\int_0^1 f''(t)^2 dt \right) = 3.$$

2. Déterminer les fonctions de Ω pour réalisant la borne inférieure précédente.

VI.B - Inégalité de Taylor-Lagrange

Exercice 117 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$(i) \left| \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{x^5}{5!}, \quad (ii) \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 118 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}.$$

Exercice 119 : On considère un nombre $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}.$$

2. En déduire que l'on a la relation

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 120 : Montrer que l'on a la relation

$$\ln(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Exercice 121 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n!.$$

1. Montrer que f est nulle sur $] -1/\lambda, 1/\lambda[$.

2. Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 122 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 123 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Exercice 124 - Inégalité de Kolmogorov : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose qu'il existe un couple $(M_0, M_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M_0 \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq M_2.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x)| \leq h^2 M_2.$$

2. En déduire que l'on a $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 125 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 126 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. En notant M_1 le maximum de $|f'|$ sur $[a, b]$, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M_1(b-a)^2}{4}.$$

Partie VII Méthodes d'approximation d'une intégrale

Exercice 127 - Méthode des rectangles : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soient $K \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si f est K -lipschitzienne, alors on a

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{K(b-a)^2}{2n}.$$

2. Établir une majoration analogue si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Exercice 128 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt - \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 129 - Méthode des trapèzes : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

1. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$, on a la relation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - (\beta - \alpha) \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(t - \alpha)(t - \beta)}{2} f''(t) dt.$$

2. En notant M_2 le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.$$

Exercice 130 - Méthode des points milieux : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n}.$$

En notant M_2 le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$, montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

— Solutions partielles —

Exercice 1 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \sqrt{2}-1, & (ii) \frac{\ln(\ln(5))-\ln(\ln(4))}{2}, & (iii) 0, \\
 (iv) \frac{\pi^2}{72}, & (v) 2\sqrt{e+1}-2\sqrt{2}, & (vi) \frac{1}{2}, \\
 (vii) \frac{\ln(2)}{2}, & (viii) \frac{\ln(2)}{2}, & (ix) \frac{\pi}{8}, \\
 (x) \frac{\ln(2)}{2}, & (xi) \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, & (xii) \frac{1}{\ln(2)}, \\
 (xiii) \ln\left(\frac{e+1}{2}\right), & (xiv) 2\operatorname{Arctan}(e)-\frac{\pi}{2}, & (xv) \frac{4-e}{e^2}.
 \end{array}$$

Exercice 2 : Les primitives sont les suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 (i) \ln(|x-3|)-\ln(|x-2|), & (ii) -\frac{1}{x-3}, \\
 (iii) \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right), & (iv) 3\ln(|x-2|)-2\ln(|x-1|), \\
 (v) x-4\ln(|x+2|)-\frac{4}{x+2}, & (vi) 2\operatorname{Arctan}(x-2)+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5).
 \end{array}$$

Exercice 3 : Une primitive de la fonction est $x \mapsto \frac{1}{\sin(\theta)}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

Exercice 4 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \frac{3\ln(3)-8\ln(2)}{12}, & (ii) \frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln(2), & (iii) \frac{3-2\ln(2)}{9}, \\
 (iv) \frac{4-\ln(3)}{4}, & (v) \frac{17-24\ln(2)}{8}, & (vi) \frac{4\pi\sqrt{3}-9}{54}.
 \end{array}$$

Exercice 5 : En notant $a = \operatorname{Re}(\lambda)$ et $b = \operatorname{Im}(\lambda)$, une primitive est

$$F(t) = \ln|t-\lambda| + i\operatorname{Arctan}\left(\frac{t-a}{b}\right).$$

Exercice 6 : On obtient que $I_\lambda = 2$ si $|\lambda| < 1$ et que $I_\lambda = 2|\lambda|^{-1}$ si $|\lambda| > 1$.

Exercice 7 : Si $m \neq n$, on a $I_{m,n} = 0$. Sinon, on a $I_{0,0} = 2\pi$ et $I_{n,n} = \pi$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 : On obtient que $I_{m,n} = \frac{(n-m)(m+n+1)}{2}$.

Exercice 9 : En distinguant les cas, on obtient que $I_a = a$ si $a \leq 0$, que $I_a = \frac{1}{2}$ si $a \geq 1$ et que $I_a = a - \frac{a^2}{2}$ si $a \in [0, 1]$.

Exercice 12 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \frac{\pi}{2} + \ln(2) - 2, & (ii) \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}, & (iii) \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \\
 (iv) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, & (v) e^2 - \frac{1}{2}, & (vi) \frac{\pi}{2}, \\
 (vii) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2), & (viii) \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2), & (ix) -\frac{\ln(2)}{4}.
 \end{array}$$

Exercice 13 : On obtient que $I_n = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

Exercice 14 : Une primitive est définie par $x \mapsto \sin(x)\ln(1+\cos(x)) + x - \sin(x)$.

Exercice 15 : En effectuant des intégrations par parties successives, on trouve

$$\int^x \ln^n(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} x \ln^{n-k}(x).$$

Exercice 16 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$(i) \frac{1 + e^{-\pi}}{2}, \quad (ii) \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-2\pi},$$

$$(iii) \frac{\pi e^{\pi} - e^{\pi} - 1}{2}, \quad (iv) \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

Exercice 17 : Les primitives sont les suivantes.

$$(i) \left(\frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} \cos(t) \right) e^t, \quad (ii) \left(\frac{2}{13} \cos(3t) + \frac{3}{13} \sin(3t) \right) e^{2t},$$

$$(iii) \left(\frac{1}{5} \sin(2t) - \frac{1}{10} \cos(2t) - \frac{1}{2} \right) e^{-t}, \quad (iv) \left(\frac{1}{2} t \cos(t) + \frac{1}{2} (t-1) \sin(t) \right) e^t.$$

Exercice 18 : Les primitives sont les suivantes.

$$F(t) = \frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2} e^{ax} \quad \text{et} \quad G(t) = \frac{a \sin(bx) - b \cos(bx)}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

Exercice 19 : En effectuant deux intégrations par parties, on obtient que

$$\int_x^{\infty} \cos(\ln(t)) dt = \frac{x}{2} (\cos(\ln(x)) + \sin(\ln(x))),$$

$$\int_x^{\infty} \sin(\ln(t)) dt = \frac{x}{2} (\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))).$$

Exercice 20 : Une primitive de la fonction est $x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x) + \frac{x}{2(x^2 + 1)}$.

Exercice 21 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$(i) 2\sqrt{2} \ln(2) - 4\sqrt{2} + 4 \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{t}, \quad (ii) \frac{\pi}{4} \quad \text{avec} \quad u = \ln(t),$$

$$(iii) \ln(1 + 2\sqrt{2}) - \ln(3) \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{t}, \quad (iv) 2(\sqrt{2} - 1) \quad \text{avec} \quad u = \ln(t).$$

Exercice 22 : Les primitives sont les suivantes.

$$(i) \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) \quad \text{avec} \quad u = x^2, \quad (ii) \frac{1}{3} \operatorname{Arctan}(x^3 - 2) \quad \text{avec} \quad u = x^3.$$

Exercice 23 : En posant $x = \tan(t)$, on trouve $I = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

Exercice 24 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$(i) \int_{-1}^1 \frac{1 - u^2}{1 + u^2} du = \pi - 2 \quad \text{avec} \quad u = \cos(t),$$

$$(ii) \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{u^2}{1 - u^2} du = \frac{\ln(2 + \sqrt{2}) - \ln(2 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}}{2} \quad \text{avec} \quad u = \sin(t),$$

$$(iii) \int_0^1 \frac{du}{1 + 2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}) \quad \text{avec} \quad u = \tan(t),$$

$$(iv) \int_0^1 \frac{du}{1 + u + u^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{avec} \quad u = \tan\left(\frac{t}{2}\right).$$

Exercice 25 :

(i) En posant $u = \sin(t)$, on trouve que les primitives sont

$$F(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right| + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

(ii) En posant $u = \cos(t)$, on trouve que les primitives sont

$$F(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos(t)}{1 + \cos(t)} \right| + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26 : Utiliser les changements de variable suivants.

$$(i) u = e^t, \quad (ii) u = e^t, \quad (iii) u = e^t,$$

$$(iv) u = \sqrt{1 + e^{2t}}, \quad (v) u = \sqrt{e^t - 1}, \quad (vi) u = e^t.$$

Exercice 27 : Utiliser les changements de variable suivants.

$$(i) u = \sqrt{t}, \quad (ii) u = \sqrt{t+2}, \quad (iii) u = \sqrt{t^2 - 1}.$$

Exercice 28 : Utiliser les changements de variable suivants.

$$(i) \quad t = \sin(\theta), \quad (ii) \quad t = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sh}(x) - \frac{1}{2}.$$

Exercice 29 : Les solutions sont les suivantes.

$$(i) \quad \frac{\pi}{4} \text{ avec } t = \sin(u), \quad (ii) \quad \frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8} \text{ avec } t = 3\sin(u) + 1, \\ (iii) \quad \frac{\pi}{16} \text{ avec } t = \sin(u), \quad (iv) \quad \frac{13\sqrt{5}}{6} + 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{8}{3} \text{ avec } t = 2\operatorname{sh}(u) + 1.$$

Exercice 30 : En posant $u = \sqrt{e^t - 1}$, on trouve

$$F(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{e^x - 1}}{2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{e - 1}}{2}\right).$$

Exercice 31 : On a $I = J$ et $I + J = \frac{\pi}{2}$, donc $I = J = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 32 : En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, on trouve que

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{1 + \cos^2 u} du = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}, \\ J = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{du}{1 + \sin(u)} du = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

Exercice 33 : On obtient que $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

Exercice 34 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$(i) \quad 0 \text{ avec } u = 1/x, \quad (ii) \quad \frac{3\pi}{4} \text{ avec } u = 1/x, \quad (iii) \quad \frac{\pi}{2} \text{ avec } u = -x.$$

Exercice 35 : Avec une intégration par parties, on trouve la relation

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad I_{m,n} = -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$$

et on en déduit pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ que

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1} \binom{m+n}{n}^{-1} \frac{(\alpha - \beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

Exercice 40 : Remarquons que $t \mapsto t^n \ln^p(t)$ se prolonge par continuité en 0 pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Avec une intégration par parties, on trouve la relation

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1}$$

et on en déduit

$$I_{n,p} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Exercice 42 : On trouve $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 45 : On a $I_n = \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{f^{(k)}(1)}{(n+1) \dots (n+k+1)} + o\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$.

Exercice 47 :

- (i) En utilisant la définition de la continuité en 0 de la fonction f , on obtient que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$.
- (ii) En utilisant la définition de la continuité en 1 de la fonction f et en écrivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - f(1) = (n+1) \int_0^1 t^n (f(t) - f(1)) dt,$$

on obtient que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(1)$.

Exercice 49 :

1. Toutes les primitives de f sont des fonctions paires.
2. Il existe une unique primitive de f qui est une fonction impaire.

Exercice 51 : Notons $T \in \mathbb{R}_+^*$ la période de f . Les primitives de f sont périodiques si et seulement si $\int_0^T f(t) dt = 0$.

Exercice 55 : Étudier sur les intervalles $]-\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$.

Exercice 58 : Utiliser une intégration par partie, puis couper l'intégrale en π .

Exercice 59 : Il suffit d'utiliser que la courbe représentative de la fonction f est en-dessous de la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et au-dessus de la tangente au point d'abscisse $(a+b)/2$.

Exercice 61 : Notons A la primitive de a qui s'annule en 0. En introduisant les fonctions $F: x \mapsto \int_0^x a(t)f(t) dt$ et $G: x \mapsto F(x)e^{-A(x)}$, l'inégalité de départ se réécrit $H'(x) \leq ba(x)\exp(-A(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui permet de conclure en intégrant.

Exercice 64 : Introduire la fonction positive $g = f^2(1-f)^2$.

Exercice 66 : On pourra regarder $\int_0^\pi f(t) \sin(t-a) dt$.

Exercice 69 : En notant F la primitive de f s'annulant en 0, on a $F(1) = 0$ avec l'hypothèse en prenant $g = 1$. En utilisant une intégration par parties, on a

$$0 = \int_0^1 f(t)g(t) dt = - \int_0^1 F(t)g'(t) dt.$$

On conclut en choisissant g tel que $g' = F$.

Exercice 72 : Écrire $\int_a^b f(t) dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right| e^{i\theta}$ et introduire $g = e^{-i\theta} f$.

Exercice 74 : Utiliser une intégration par parties.

Exercice 76 : La limite est $f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 79 : Si $x > 1$, on peut utiliser l'encadrement

$$x \ln(2) = x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq f(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = x^2 \ln(2).$$

Si $x \in]0, 1[$, on peut établir un encadrement analogue, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$.

Exercice 80 : La fonction f est π périodique et elle vérifie $f(x) = f(\pi - x)$. On en déduit en dérivant sur $[0, \pi/2]$ que f est constante de valeur $\pi/4$.

Exercice 81 : En dérivant deux fois par rapport à y , on trouve que les solutions sont les fonctions affines.

Exercice 82 : En dérivant par rapport à x puis par rapport à y , on trouve que f' est constante. On conclut que la seule solution est la fonction nulle.

Exercice 84 : Si on note $h(x)$ la différence entre le membre de gauche et le membre de droite, on a $h(0) = 0$ et

$$h'(x) = f(x) \left(2 \int_0^x f(t) dt - f(x)^2 \right).$$

En réitérant avec le second membre de ce produit, on en déduit que $h' \geq 0$, d'où le résultat.

Exercice 85 : Introduire la fonction $\varphi: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \varphi(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right) \left(\int_0^x g(t) dt \right) - x \int_0^x f(t)g(t) dt,$$

et remarquer que l'on a

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \int_0^x (f(x) - f(t))(g(x) - g(t)) dt \geq 0.$$

Exercice 86 : Pour la question 2, si on note G la primitive de g telle que $G(a) = 0$, on obtient avec une intégration par parties et la question 1 qu'il existe $\tilde{c} \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(b)G(b) + (f(a) - f(b))G(\tilde{c}) \in f(a) \times G([a, b]).$$

Exercice 89 : On a égalité pour une fonction $f \in E$ si et seulement si f est constante.

Exercice 90 : On obtient que $m = |b - a|$ avec la fonction $f : t \mapsto a + (b - a)t$.

Exercice 91 :

1. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par le maximum M de la fonction f sur $[0, 1]$.
3. La limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est M . On peut démontrer le résultat en se ramenant au cas où $M = 1$, puis en établissant que $I_{n+1} \sim I_n$ avec la définition. Une autre solution est d'utiliser le lemme de Cesàro et le résultat de l'exercice 46.

Exercice 92 : Il suffit de remarquer que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(x)|^2 = \left| \int_a^x f'(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_a^x 1^2 dt \right) \left(\int_a^x |f'(t)|^2 dt \right).$$

Exercice 93 : Avec une intégration par parties, on peut écrire

$$\int_0^1 f(t)^2 dt = -2 \int_0^1 t f'(t) f(t) dt \leq 2 \left(\int_0^1 (t f'(t))^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 f(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 96 : En utilisant le logarithme, on trouve que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers $e^{-1/4}$.

Exercice 98 : En utilisant les équivalents obtenus en faisant apparaître des sommes de Riemann, on obtient que nécessairement $(a+1)^{b+1} = (b+1)^{a+1}$. On conclut que les solutions sont $(1, 3)$ et $(3, 1)$.

Exercice 99 : En encadrant, on trouve que la limite est $3/2$ avec une somme de Riemann.

Exercice 103 : En étudiant le logarithme de la suite, puis un utilisant la première question et une somme de Riemann, on conclut que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $2^{2/\pi}$.

Exercice 104 : En encadrant avec des intégrales, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{1-1/n} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq u_n \leq \int_{1/n}^{1-1/n} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}},$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\pi/2$.

Exercice 105 : En encadrant avec des intégrales, on trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 106 : On trouve en passant par une somme de Riemann que

$$\int_0^{2\pi} \ln |x - e^{it}| dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1, \\ 2\pi \ln |x| & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

Exercice 109 : Poser $u = nt$, puis découper en intervalle de longueur π et se ramener à une intégrale de 0 à π . On conclut en utilisant la continuité uniforme de la fonction f et avec une somme de Riemann.

Exercice 111 : Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires avec l'expression intégrale du reste.

Exercice 112 :

1. Soit $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F^{(n)} = f$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, la fonction $F - g$ est polynomiale de degré au plus $n-1$, d'où le résultat. On peut aussi faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On remarque que $g_p^{(p+1)}(x) = \frac{1 - (1-x)^n}{x}$. On en déduit avec la formule de la première question que

$$g_p(1) = \frac{1}{p!} \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^n}{t} (1-t)^p dt = \frac{1}{p!} \int_0^1 \frac{u^p - u^{n+p}}{1-u} du = \frac{1}{p!} \sum_{k=p+1}^{n+p} \frac{1}{k}.$$

Exercice 113 : Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral en une racine de P .

Exercice 114 : Avec la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(1) = f(0) + f'(0) \times 1 + \int_0^1 \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} (1-t) dt.$$

On en déduit que $I = \ln(2)/2$.

Exercice 115 : En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve que

$$f(x) = x \int_0^1 (t-1)g(t) dt + \int_0^x (x-t)g(t) dt.$$

Exercice 116 : Avec la formule de Taylor avec reste intégral, on a

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t)f''(t) dt,$$

donc on peut conclure avec Cauchy-Schwarz. L'égalité est réalisée pour la fonction définie par $f : t \mapsto 2^{-1}t(t-1)(t-2)$

Exercice 121 :

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange entre 0 et $x \in]-1/\lambda, 1/\lambda[$.
2. Il suffit d'appliquer le raisonnement en $1/(2\lambda)$, puis d'itérer.

Exercice 122 :

1. Il suffit de considérer une racine $a \in \mathbb{R}$ du polynôme P .
2. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 123 : Raisonner par l'absurde, puis intégrer f'' deux fois. On peut aussi utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$.

Exercice 124 :

1. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[x-h, x]$ et $[x, x+h]$.
2. On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'inégalité

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

On obtient le résultat en trouvant la valeur optimale pour h .

Exercice 125 : Majorer $|f'(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[x, x+1]$.

Exercice 126 : Majorer la fonction $|f|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange sur les intervalles $[a, (a+b)/2]$ et $[(a+b)/2, b]$.

Exercice 128 : Il suffit de subdiviser l'intégrale et d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction f sur chaque intervalle de la subdivision. On conclut en utilisant une somme de Riemann pour la fonction f' .

Exercice 129 :

1. Faire des intégrations par parties.
2. Il suffit de subdiviser l'intégrale puis de majorer en remarquant que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} dt = \frac{(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

Exercice 130 : Il suffit de subdiviser l'intégrale et d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à chaque points $(x_k + x_{k+1})/2$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.