Intégration sur un intervalle

Partie I Convergence d'intégrales

I.A - Exercices d'applications

Exercice 1 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{(t-1)(t-5)}{t^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t,\qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1},\qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t,\qquad (v)\ \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\qquad (vi)\ \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

$$(vii)\ \int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(t^{-1}\right)\mathrm{d}t,\qquad (viii)\ \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^2-t^3}},\qquad (ix)\ \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}},$$

$$(x)\ \int_0^{+\infty} t\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\qquad (xi)\ \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t,\qquad (xii)\ \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t$$

$$(xiii)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(1+\sin(t))\,\mathrm{d}t,\qquad (xiv)\ \int_0^{+\infty} t^{-\ln(t)}\,\mathrm{d}t,\qquad (xv)\ \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{Arccos}(t)}.$$

Exercice 2 : Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \left((t+1)^{1/3}-t^{1/3}\right)^2\mathrm{d}t,\qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}(t))\,\mathrm{d}t,$$

$$(iii)\ \int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t,\qquad (iv)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i)\ I_a = \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t,\qquad (ii)\ J_a = \int_0^{\pi/2} \tan(t)^a\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 - Intégrales de Bertrand : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la convergence de

$$I_{a,b} = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a\ln(t)^b} \quad \text{et} \quad J_{a,b} = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^a\ln(t)^b}.$$

Exercice 5 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^a\mathrm{e}^{-t}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t,\qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6 : On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.
3. Montrer que
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 : Soient les fonctions $f : [\pi,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $g : [\pi,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall t \in [\pi,+\infty[,\quad f(t) = \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{et} \quad g(t) = \ln\left(1+\frac{\sin(t)}{t}\right).$$

Montrer que f et g sont équivalentes en $+\infty$, mais que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ ne sont pas de même nature.

Exercice 8 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$I_a = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin(t)}{t^a}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t,$$
$$(iii)\quad \int_0^{+\infty} \cos\left(t^a\right)\mathrm{d}t, \qquad (iv)\quad \int_0^{+\infty} \sin\left(t^a\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 10 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul tel que $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2(t)}{t^a}\right) - 1\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 12 - Intégrales de Hardy : Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'intégrale

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{1 + t^\beta \sin^2(t)}.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec $x > -1$, calculer l'intégrale

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x\sin^2(t)}.$$

2. Déterminer un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^\alpha\,\mathrm{d}t}{1 + t^\beta \sin^2(t)}.$$

3. En déduire que l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 2\alpha + 2$.
4. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction intégrée dans $I_{\alpha,\beta}$.

Exercice 13 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites tendant vers $+\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_n}^{y_n} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. En déduire que que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ diverge.

I.B - Exercices théoriques

Exercice 14 : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 15 : Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 16 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique avec $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'on a l'équivalence

$$\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \ \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 17 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. On considère la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) = f(x)\sin(x).$$

Montrer que la fonction g est intégrable si et seulement si f est intégrable.

Exercice 18 : On considère une fonction continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ et on note

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad I_\lambda = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale I_a converge, alors l'intégrale I_λ converge pour tout $\lambda > a$.

Exercice 19 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et intégrable. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t-1/t)$ est intégrable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\int_{-\infty}^0 f\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20 : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue et croissante. On note

$$I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k(b-a)}{n}\right).$$

1. Montrer que si I converge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers I.
2. Montrer que si I diverge, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 21 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive telle que

$$\exists \ell \in [0,1[, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ell.$$

Montrer que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 22 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive telle que

$$\exists a \in \mathbb{R}_-^*, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a.$$

Montrer que les fonctions f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

Exercice 23 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et positive telle que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable. On définit la fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est bien définie et que $g(x) = o(1/x)$ lorsque $x \to +\infty$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 24 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t)/t$ se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\int_0^x \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \leqslant 2\int_0^x \frac{f(t)f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que si la fonction f' est de carré intégrable sur $[0,+\infty[$, alors la fonction $t \mapsto f(t)/t$ est de carré intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 25 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On fixe $T \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 26 - Inégalité de Hardy : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable. On considère la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité
$$\int_0^A g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^A f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que
$$\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$
4. Montrer que fg est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 27 - Inégalité de Kolmogorov : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables.

1. Montrer que ff'' est intégrable.
2. En déduire que $f(x)f'(x)$ admet une limite ℓ en $+\infty$ et que $\ell = 0$.
3. Conclure que f' est de carré intégrable et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Partie II Calcul d'intégrales

Exercice 28 : Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}, \qquad (iii)\ \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t, \qquad (v)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad (vi)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

$$(vii)\ \int_0^1 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t, \qquad (viii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \qquad (ix)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}(t)},$$

$$(x)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}, \qquad (xi)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}, \qquad (xii)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+t^2}}.$$

Exercice 29 : Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}, \qquad (ii)\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$(iii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{5\,\mathrm{ch}(t)+3\,\mathrm{sh}(t)+4}, \qquad (iv)\ \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{Arctan}(t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 30 : On note φ la racine positive de $X^2 - X - 1$. Montrer que l'intégrale suivante est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\varphi)^\varphi}.$$

Exercice 31 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et calculer leur valeur.

Exercice 32 : Soit $a \in]-1,+\infty[$ et $b \in \mathbb{R}^*$ avec $|b| \neq 1$. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur.

$$(i)\ \ I_a = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)}, \qquad (ii)\ \ J_b = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+b\tan^2(t)}.$$

Exercice 33 : Soit $a \in]0,2\pi[$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a)}{\mathrm{ch}(t)-\cos(a)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 34 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'intégrale I soit convergente.
2. Calculer l'intégrale I sous cette condition.

Exercice 35 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I_a = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}.$$

Exercice 36 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}.$$

Exercice 37 : Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 < 4q$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+pt+q}.$$

Exercice 38 : Soit $b \in \mathbb{R}$ avec $|b| \neq 1$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}.$$

Exercice 39 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer pour quelle valeur de a l'intégrale ci-dessous converge, puis calculer là en cas de convergence.

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+at+1}.$$

Exercice 40 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a>0$ et $b>0$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}.$$

Exercice 41 : Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+\mathrm{i}t)}.$$

Exercice 42 : On considère les intégrales

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\mathrm{e}^t)(1+t^2)} \quad \text{et} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{(1+\mathrm{e}^t)(1+t^2)}.$$

1. Montrer que I et J convergent, puis que $I = J$.
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 43 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} (t-\lfloor t \rfloor)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 44 : Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor t \rfloor} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 45 : Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 46 : Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t} \,\mathrm{d}t$ est convergente et que

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Exercice 47 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$

1. Montrer que I et J convergent, puis que $I = J$.
2. En déduire la valeur de I.

Exercice 48 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

1. Montrer que J converge et calculer sa valeur.
2. Montrer que I et K convergent et que $I = K$.
3. En factorisant $1 + t^4$, déterminer la valeur de I.

Exercice 49 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère les intégrales

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a = \int_0^{+\infty} \frac{t^a\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_a = J_a$.
3. Calculer $I_a + J_a$. En déduire la valeur de I_a et J_a.

Exercice 50 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_a est convergente pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_1 = 0$.
3. En posant $t = au$, calculer la valeur de I_a pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 51 - Intégrales de Frullani : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur valeur.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(bx) - \operatorname{Arctan}(ax)}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 52 - Intégrales de Frullani : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie L en $+\infty$ et une limite finie ℓ en 0. On considère un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < a < b$ et les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente et calculer sa valeur.
2. En déduire que l'intégrale J converge et calculer sa valeur.

Exercice 53 - Intégrales de Frullani : Soient $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$ et les intégrales

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On suppose que l'intégrale I est convergente.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que l'intégrale J converge et calculer sa valeur.

Exercice 54 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente et que

$$I = \int_1^{+\infty} \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left(-\left(t-\frac{1}{t}\right)^2\right)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que l'intégrale J est convergente et exprimer I en fonction de J.

Exercice 55 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère les intégrales

$$I_a = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_a est convergente et que

$$I_a = \int_{\sqrt{a}}^{+\infty} \left(1+\frac{a}{t^2}\right)\exp\left(-\left(t^2+\frac{a^2}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que l'intégrale J est convergente et exprimer I_a en fonction de J.

Exercice 56 : On considère la fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $F(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

3. En déduire la valeur de $F(1)$.

Exercice 57 - Intégrales d'Euler : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$. En déduire la valeur de I et J.

Exercice 58 : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que I et $I(x)$ sont convergentes pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En linéarisant $\sin^3$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad I(x) = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 59 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier la convergence et calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\mathrm{Arctan}(t+a) - \mathrm{Arctan}(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 60 : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et une limite finie ℓ' en $-\infty$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(t+a) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Partie III Intégrabilité et comportement asymptotique

Exercice 61 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors cette limite est nulle.

Exercice 62 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f et f' sont intégrables. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 63 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 64 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable. Montrer que f admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 65 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $f(x) = o(1/x)$ en $+\infty$.

Exercice 66 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' sont intégrables.

1. Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
2. En déduire que la fonction ff' est intégrable.

Exercice 67 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{x} t f(t)\,\mathrm{d}t = o(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 68 : Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable. Montrer que $\displaystyle\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = o(\sqrt{x})$ lorsque $x \to +\infty$.

Partie IV Suites définies par une intégrale

Exercice 69 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 70 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la valeur de I_n en fonction de I_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 71 : Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on considère l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln^p(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale $I_{n,p}$ est convergente pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
2. Calculer la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 72 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{\tan(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que I_n converge et calculer sa valeur.

Exercice 73 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que l'on a la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$
3. En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

Exercice 74 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que I_n converge et calculer sa valeur.

Exercice 75 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) \ln(\sin(t)) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $2nI_n - (2n+2)I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 76 : Soit $a \in \,]0, \pi[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - \sin(a)\cos(t)} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer $I_{n+2} + I_n$ en fonction de I_{n+1}.
3. En déduire une expression de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 77 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $I_n = \int_0^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $I_n = 1 + o(1/n)$.

Exercice 78 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer un équivalent de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 79 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}.$$

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$ et calculer I_0.
2. En calculant $I_{n+1} - I_n$, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. Montrer qu'il existe $A > 0$ telle que $I_n \sim \dfrac{a}{\sqrt[3]{n}}$.

Exercice 80 : On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la nature de l'intégrale I.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \in]0,1]$ tel que
$$\int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t = n.$$
3. Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie V Intégration des relations de comparaison

Exercice 81 : Déterminer un équivalent en 1^- de la fonction Arccos.

Exercice 82 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f(x) = O(1/x)$ en $+\infty$.

Exercice 83 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 84 : Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 85 : Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ à trois termes de la fonction $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 86 : Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer qu'il existe une constante $A \in \mathbb{R}$ tel que en $+\infty$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + A - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 87 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement asymptotique à n termes en $+\infty$ de la fonction $\mathrm{Li} : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}.$$

Partie VI Fonctions définies par une intégrale

Exercice 88 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la monotonie de f.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ et en 0^+.

Exercice 89 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 90 : On définit la fonction cosinus intégrale $\mathrm{Ci} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\mathrm{Ci}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathrm{Ci}(x) = \ln(x) + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!(2n)}.$$

Exercice 91 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer $f(x) = o\left(x^{-1}\right)$ en $+\infty$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 92 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer $f(x) = o\left(x^{-1}\right)$ en $+\infty$.
4. Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = -\ln(x) - \gamma - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!n}.$$

5. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 93 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 94 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 95 : On définit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{1-t^3}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $[1,+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[1,+\infty[$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et que f^{-1} est solution de l'équation différentielle $y'y = \sqrt{y^3-1}$ sur $[0,+\infty[$.

Exercice 96 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^1 \exp\left(\mathrm{i}xt^2\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \exp\left(\mathrm{i}t^2\right)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente et que sa valeur est non nulle.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 97 - Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 98 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Solutions partielles

Exercice 1 : Les intégrales convergentes sont les suivantes.

$$(i),\quad (iv),\quad (v),\quad (vi),\quad (vii),\quad (viii),\quad (ix),\quad (xi),\quad (xiii),\quad (xiv),\quad (xv).$$

Exercice 2 : Les intégrales convergentes sont (i) et (ii).

Exercice 3 :

(i) L'intégrale I_a converge si et seulement si $2 < a < 4$.

(ii) L'intégrale J_a converge si et seulement si $-1 < a < 1$.

Exercice 4 : L'intégrale $I_{a,b}$ converge si et seulement si $a > 1$ ou ($a = 1$ et $b > 1$).

Exercice 8 : En utilisant un développement limité, on trouve que I_a converge si et seulement si $a > 1/2$.

Exercice 9 : On note I_a l'intégrale étudiée.

(i) Si $a \geqslant 1$, on montre que I_a diverge avec un équivalent en 0^+. Si $0 < a < 1$, on montre que I_a converge en utilisant un équivalent en 0^+ et une intégration par parties. Si $a \leqslant 0$, l'intégrale I_a diverge, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t \geqslant (2n\pi)^{-a}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(ii) En utilisant les mêmes méthodes que pour (i), on montrer I_a converge si et seulement si $0 < a < 2$.

(iii) En utilisant le changement de variable $u = t^a$ si $a \neq 0$, on se ramène au cas (i). On en déduit que l'intégrale I_a converge si et seulement si $a > 1$.

(iv) En utilisant le changement de variable $u = t^a$ si $a \neq 0$, on se ramène au cas (ii). On en déduit que l'intégrale I_a converge si et seulement si $|a| > 1$.

Exercice 10 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que P' n'a pas de racines dans $[a, +\infty[$. En utilisant une intégration par parties, on a pour tout $x \in [a, +\infty[$ que

$$\int_a^x \cos(P(t))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(P(t))}{P'(t)}\right]_a^x + \int_a^x \frac{\sin(P(t))P''(t)}{P'(t)^2}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui permet de conclure avec les règles de comparaisons.

Exercice 11 : La fonction est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha \leqslant 2$ et en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 12 :

1. En posant $u = \tan(t)$, on obtient que $\phi(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{x+1}}$.
2. En encadrant le numérateur, on obtient que $I_n \sim \pi^{1+\alpha-\beta/2} n^{\alpha-\beta/2}$.
4. La fonction n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en posant $x_n = (2n+1)\pi$ et $y_n = (2n+2)\pi$ que

$$\int_{x_n}^{y_n} \mathrm{e}^{-t\sin(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{x_n}^{y_n} 1\,\mathrm{d}t = y_n - x_n = \pi.$$

Exercice 14 : Effectuer une intégration par parties.

Exercice 15 : Effectuer une intégration par parties.

Exercice 17 : Majorer l'intégrale de $|f|$ sur $[0, n\pi]$.

Exercice 18 : Effectuer une intégration par parties.

Exercice 19 : Notons $\varphi_1 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ les difféomorphismes définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\quad \varphi_1(x) = x - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \varphi_2(x) = x - \frac{1}{x}.$$

En remarquant que $\varphi_1^{-1} + \varphi_2^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, on obtient que

$$\forall y \in \mathbb{R},\quad 0 \leqslant \left(\varphi_1^{-1}\right)'(y) < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \left(\varphi_2^{-1}\right)'(y) < 1.$$

On en déduit avec le théorème du changement de variable que $t \mapsto f(t - 1/t)$ est intégrable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis la relation demandée.

Exercice 21 : Par hypothèse, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad f(x+1) < q f(x) \quad \text{avec} \quad q = \frac{\ell+1}{2}.$$

On conclut en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_A^{A+n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 22 : Pour $x > 0$ suffisamment grand, on a $f'(x)/f(x) \leqslant a/2$, puis en intégrant, on obtient une majoration de $f(x)$.

Exercice 24 :

2. Utiliser une intégration par parties.
3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la question précédente.

Exercice 25 : Si F est une primitive de f, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a + T < b$, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\left(\int_a^b F(t+T)\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{T}\left(\int_{a+T}^{b+T} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_b^{b+T} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{a+T} F(t)\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, l'expression précédente converge vers

$$\frac{(b+T)-b}{T}\left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - \frac{(a+T)-a}{T}\left(\lim_{x\to-\infty} F(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 26 :

2. Utiliser une intégration par parties.
3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la question précédente.
4. Utiliser l'intégration par parties de la seconde question.

Exercice 27 : Pour 2. et 3., utiliser une intégration par parties sur l'intégrale de la fonction $t \mapsto f'(t)^2$ sur $[0, x]$.

Exercice 28 : Les valeurs des intégrales sont les suivantes.

$$\begin{array}{llll} (i)\ \ln(2), & (ii)\ \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}, & (iii)\ -2\ln(2), & (iv)\ \pi, \\ (v)\ 0, & (vi)\ -4, & (vii)\ -\dfrac{1}{2}, & (viii)\ 2, \\ (ix)\ \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right), & (x)\ \pi, & (xi)\ \pi, & (xii)\ \sqrt{2}-1. \end{array}$$

Exercice 29 : Les solutions sont les suivantes.

$$\begin{array}{ll} (i)\ \dfrac{1}{2} \ \text{avec}\ u = \mathrm{e}^t, & (ii)\ \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \ \text{avec}\ u = \sqrt{\tan(t)}, \\ (iii)\ \dfrac{1}{6} \ \text{avec}\ u = \mathrm{e}^t, & (iv)\ \dfrac{\pi}{8} \ \text{avec}\ u = 1/t. \end{array}$$

Exercice 30 : En utilisant le changement de variable $u = 1/t$, on obtient que $I = 1$.

Exercice 31 : On trouve $I = \dfrac{a}{a^2+1}$ et $J = \dfrac{1}{a^2+1}$.

Exercice 32 :

(i) En posant $u = \tan(t)$, on obtient que $I_a = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$.

(ii) En posant $u = \tan(t)$, on obtient que $J_b = \dfrac{\pi}{2(1+|b|)}$.

Exercice 33 : On obtient que $I_a = 2(\pi - a)$.

Exercice 34 : Pour $a = -2$ et $b = 1$, on trouve $I = \dfrac{4}{3}(1-\sqrt{2})$.

Exercice 35 : En posant $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+at}}$, on obtient que $I_a = \dfrac{2}{\sqrt{a}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{a})$.

Exercice 36 : En utilisant une décomposition en éléments simples, on a

$$I_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}\ln(k).$$

Exercice 37 : On trouve $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4q-p^2}}$.

Exercice 38 : Si $|b|<1$, alors $I=\pi$, sinon $I=0$.

Exercice 39 : L'intégrale I_a converge si et seulement si $a>-2$.

Exercice 40 : En séparant les cas $a=b$ et $a\neq b$, on trouve $I_{a,b} = \dfrac{\pi}{ab(a+b)}$.

Exercice 41 : En utilisant le changement de variable $u=-t$, on obtient que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 42 : On trouve $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 43 : On trouve $I_a = \dfrac{1-(a+1)\mathrm{e}^{-a}}{a^2(1-\mathrm{e}^{-a})}$.

Exercice 44 : On trouve $I=\gamma$.

Exercice 45 : On trouve $I=1-\gamma$.

Exercice 47 : On trouve $I = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 48 : On a $J=\dfrac{\pi}{4}$ et on trouve $I=K=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 49 : On trouve $I_a = J_a = \pi/4$.

Exercice 50 : On trouve $I_a = \dfrac{\pi\ln(a)}{2a}$.

Exercice 51 : On trouve $I = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ et $J = \dfrac{\pi}{2}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Exercice 52 :

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<x<y$, on a

$$\int_x^y \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   On en déduit en prenant les limites que $I = (L-\ell)\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

2. En posant $u=\ln(t)$, on obtient que $J=\ln(2)$.

Exercice 53 : On obtient que $J = f(0)\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Exercice 54 :

1. Couper l'intégrale en 1 avec la relation de Chasles, puis poser $u=1/t$ dans l'intégrale sur $]0,1[$.
2. En posant $u=t-1/t$ dans l'expression précédente, on obtient que $I=J$.

Exercice 55 :

1. Couper l'intégrale en $\sqrt{a}$ avec la relation de Chasles, puis poser $u=a/t$ dans l'intégrale sur $]0,\sqrt{a}[$.
2. En posant $u=t-a/t$ dans l'expression précédente, on obtient que $I=\mathrm{e}^{-2a}J$.

Exercice 56 : En démontrant que l'on a pour tout $x\in[0,1[$ l'encadrement

$$x^2\ln(2) = x^2\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant F(x) \leqslant x\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = x\ln(2).$$

On en déduit que $F(1)=\ln(2)$.

Exercice 57 : On trouve $I = J = -\dfrac{\pi\ln(2)}{2}$.

Exercice 58 : On trouve $I = \dfrac{3}{4}\ln(3)$.

Exercice 59 : On trouve $I = a\pi$.

Exercice 60 : On trouve $I = a(\ell - \ell')$.

Exercice 67 : Faire une intégration par parties en considérant une primitive de f.

Exercice 68 : Couper l'intégrale en $A > 0$ suffisamment grand et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur la seconde intégrale.

Exercice 69 : On a $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 70 : On a $I_{n+1} = \dfrac{n}{2} I_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 71 : On a $I_{n,p} = (-1)^p \dfrac{p!}{(n+1)^{p+1}}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 72 : La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante de valeur $\pi/2$.

Exercice 73 : On a $I_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 74 : On trouve $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$.

Exercice 75 : La suite $(2nI_n)$ est constante et $I_n = -\dfrac{\pi}{4n}$.

Exercice 76 : On trouve $I_{n+2} + I_n = \dfrac{2I_{n+1}}{\sin(a)}$ et $I_n = \dfrac{\pi}{\cos(a)} \tan^n(a/2)$.

Exercice 77 : En coupant l'intégrale en 1 et en posant $u = 1/t$ dans la seconde intégrale, on trouve

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+u^{n-2}}{1+u^n}\, \mathrm{d}t.$$

On montre que $I_n - 1 = o(1/n)$ avec des intégrations par parties.

Exercice 78 : En utilisant une intégration par parties, on obtient que $I_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 79 : On trouve $I_0 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ et $I_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3} I_n$. En notant $v_n = \sqrt[3]{n} I_n$, on a que la série de terme générale $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge, ce qui permet de conclure.

Exercice 80 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et on a

$$n + \ln(u_n) = \int_{u_n}^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\, \mathrm{d}t.$$

On en déduit que $u_n \sim \mathrm{e}^{\ell - n}$.

Exercice 81 : La fonction Arccos' est intégrable sur $[0,1]$, donc

$$\mathrm{Arccos}(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2(1-t)}} = \sqrt{2(1-x)}.$$

Exercice 82 : Utiliser une intégration par partie.

Exercice 83 : En utilisant une intégration par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} + o(f(x)),$$

donc on a l'équivalent $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Exercice 84 : En utilisant une intégration par parties, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + o(f(x)),$$

donc on a l'équivalent $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

Exercice 85 : Avec des intégrations par parties, on a pour tout $x \in [1,+\infty[$ que

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt.$$

De plus, on a avec une autre intégration par parties que

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,dt = \frac{e^x}{x^3} + o\left(\int_1^x \frac{e^t}{t^3}\,dt\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^3}.$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + o\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$

Exercice 86 : On a en $+\infty$ le développement asymptotique

$$\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\ln(t)}{t} + \frac{1}{t^2} + \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

On en déduit en intégrant que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x) + 1 - \frac{1}{x} + \int_1^x \varepsilon(t)\,dt.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que ε est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc on a

$$\int_1^x \varepsilon(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \varepsilon(t)\,dt - \int_x^{+\infty} \varepsilon(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \varepsilon(t)\,dt + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 87 : Avec des intégrations par parties, on a pour tout $x \in [2,+\infty[$ que

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + n!\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)} + O(1).$$

De plus, on a avec une autre intégration par parties que

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)} &= \frac{x}{\ln^{n+1}(x)} + (n+1)\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+2}(t)}\,dt + O(1) \\ &= \frac{x}{\ln^{n+1}(x)} + o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1}(t)}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln^{n+1}(x)}.\end{aligned}$$

On conclut que

$$\mathrm{Li}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{\ln^{k+1}(x)} + o\left(\frac{x}{\ln^{n+1}(x)}\right).$$

Exercice 88 : On trouve $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/(2x)$ et $f(x) \underset{0}{\sim} 1/x$.

Exercice 89 : D'une part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^x \frac{\cos^2(t)-1}{t}\,dt = \ln(x) + O(1) \underset{0^+}{\sim} \ln(x).$$

D'autre part, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que

$$f(x) = \int_1^x \frac{1+\cos(2t)}{2t} = \frac{\ln(x)}{2} + O(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{2}.$$

Exercice 90 : Il suffit d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \left(\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt\right) + \int_0^x \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt.$$

Exercice 91 :

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$0 \leqslant xf(x) \leqslant \int_x^{+\infty} te^{-t^2}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

3. En utilisant une intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = [tf(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Exercice 92 :

3. On a la majoration

$$0 \leqslant xf(x) = \int_x^{+\infty} \frac{xe^{-t}}{t}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

4. Il suffit d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que

$$f(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} + \left(\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) - \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt.$$

5. En utilisant une intégration par parties, on a

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = [tf(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Exercice 93 : En utilisant deux intégrations par parties, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, en utilisant une nouvelle intégration partie, on obtient que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty,$$

ce qui permet de montrer que l'intégrale converge et est égale à 1.

Exercice 94 : En utilisant deux intégrations par parties, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, en utilisant une nouvelle intégration partie, on obtient que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty,$$

ce qui permet de montrer que l'intégrale converge et est égale à 0.

Exercice 96 :

1. Pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a avec une intégration par parties que

$$\int_0^A \exp\left(\mathrm{i}t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^A \frac{\exp(\mathrm{i}t^2) - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   On en déduit que I converge et que $\mathrm{Im}(I) > 0$.

2. En posant $u = \sqrt{x}\,t$, on obtient que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{I}{\sqrt{x}}$.

Exercice 98 : En découpant l'intégrale avec les intervalles $[k\pi, (k+1)\pi]$ où $k \in \mathbb{N}$ vérifie $k + 1 < x$ et en encadrant, on obtient que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln(x)}{\pi}$.