Intégrales dépendant d'un paramètre

Partie I Théorème de convergence dominée

Exercice 1 : Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

(i) $n\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$, (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{nx+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$, (iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$,

(v) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$, (vi) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{Arctan}(nx)\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x$,

(vii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$, $(viii)$ $\displaystyle\int_0^{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$,

(ix) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, (x) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}.$$

Exercice 3 : Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{a}st}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^{n}\sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4 : Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5 : Montrer que l'on a l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6 : Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+bn}.$$

Exercice 7 : Montrer que l'on a la relation

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 8 : Justifier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum(-1)^n\int_0^1\cos\left(nt^2\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.
3. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$.

Exercice 10 : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ est convergente.
2. Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que l'on a l'égalité

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 11 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier l'existence du nombre I.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale I_n converge et que $I_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}$.
3. En utilisant la suite $(I_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, déterminer la valeur de I.

Exercice 12 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-nx}\right)\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que les intégrales I_n et J_n convergent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer les intégrales J_n et $I_n - J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 13 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale I_n converge et que

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right).$$

2. Montrer que l'intégrale I converge et déterminer sa valeur.
3. Justifier la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 14 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Pour tout réel $u \geqslant 0$, montrer que $u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de α.

Exercice 15 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une limite ℓ en $+\infty$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 16 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

$$(i) \quad \int_0^{+\infty} n f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x, \qquad (ii) \quad \int_0^{+\infty}\frac{n f(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 18 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \int_0^1 f\left(t^n\right)\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie II Théorème d'intégration terme à terme

Exercice 19 : Montrer les égalités suivantes.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},$$

$$(iii)\ \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \qquad (iv)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2},$$

$$(v)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad (vi)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1},$$

$$(vii)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}, \qquad (viii)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3},$$

$$(ix)\ \int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t})\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}, \qquad (x)\ \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2},$$

$$(xi)\ \int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}, \qquad (xii)\ \int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^{-n}.$$

Exercice 20 : Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1-\mathrm{e}^{-bt}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+bn)^2}.$$

Exercice 21 : Montrer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ les relations suivantes.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t = p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{\ln^p(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^p p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p+1}}.$$

Exercice 22 : Calculer la somme ci-dessous en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 23 : Calculer la somme ci-dessous en remarquant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 24 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right)\mathrm{d}x.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 25 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 26 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

1. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence des séries de terme général u_n et v_n.

Exercice 27 : On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{4^n (n!)^2}\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Montrer que h est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 28 : On considère la fonction $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x > 1, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la fonction ζ est continue sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que l'on a la relation

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}.$$

Exercice 29 : On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{f(x)-f(tx)}{t\,|\ln(t)|^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{1-t^n}{t\,|\ln(t)|^{3/2}}\,\mathrm{d}t = c\sqrt{n}.$$

3. Montrer que $g(x) = cxf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie III Intégrales à paramètre réel

III.A - Exercices d'applications

Exercice 30 : On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = \int_0^1 \cos(tx)\,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\sup \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31 : On définit l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et étudier les variations de f.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ et en 0^+.

Exercice 32 : On définit l'application $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 33 : On définit l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $xy' = xy - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 34 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $f(x) + f(x+1) = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 35 : On définit l'application $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $]0, 1[$.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1/2$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en 1^-.
4. Montrer pour tout $x \in]0, 1[$ que l'on a l'égalité
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
5. Déterminer la borne inférieure de f.

Exercice 36 : On définit l'application $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer pour tout $x \in]1,+\infty[$ que
$$f'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t.$$
3. En déduire les variations de la fonction f.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 1^+.

Exercice 37 : On définit l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle
$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$
sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite nulle en $+\infty$.
3. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 38 : On définit l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle $xy' = xy - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 39 : Montrer qu'il existe un unique réel $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)\mathrm{e}^{-t}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 40 : On définit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La fonction f est-elle développable en série entière ?

Exercice 41 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $xy'' + xy = 1$.
2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E).
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 42 : On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 43 : On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin(t))\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 44 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 45 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(tx)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est développable en série entière.
3. Montrer que l'on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2/4}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 46 : Soient $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $g :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)f(x)f(x+1).$$

1. Montrer que f est définie, continue et décroissante sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que $(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.
3. Déterminer un équivalent de f en -1^+.
4. Montrer que la fonction g est périodique de période 1.
5. Montrer que la fonction g est constante sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 47 - Fonction Gamma : On définit la fonction $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Γ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de Γ en 0^+.
4. Montrer que Γ est convexe et que $\ln(\Gamma)$ est convexe.

III.B - Exercices théoriques

Exercice 48 : Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 49 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On définit la fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^1 f(t)^x\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{1/x}$.

Exercice 50 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n h(x).$$

Exercice 51 - Produit de convolution : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et T-périodiques avec $T > 0$. On définit $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_0^T f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $f * g$ est une fonction continue et T-périodique.

III.C - Application aux calculs d'intégrales

Exercice 52 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $I_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^{n+1}}.$$

1. Montrer que I_n est de classe $\mathscr{C}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n' pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{x^{2n+1}}.$$

Exercice 53 : Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, calculer l'intégrale

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 54 : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 55 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{sh}(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sh}(t)\,t^{-1}$ est bornée sur $]0, +\infty[$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 56 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
3. Calculer $f'(x)$ et $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 57 : Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, calculer l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 58 : Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, calculer l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 59 : On définit la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

Exercice 60 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 61 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(0) = 0$ en posant $u = 1/t$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 62 : On définit la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ et l'intégrale I par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{\ln(2)}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{8}\ln\left(1+x^2\right) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 63 : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et l'intégrale I par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est défini sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire la valeur de I.

Exercice 64 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(t))}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire la valeurs des intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 65 - Intégrale de Gauss : On définit les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f(x)^2 + g(x) = \pi/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 66 - Intégrale de Gauss : On définit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que I est convergente et que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' - y = Ix^{-1/2}$.
3. Calculer $f(0)$ et déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 67 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 68 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 69 - Transformée de Fourier : On définie la transformée de Fourier de toute fonction continue et intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
   (b) Déterminer une expression explicite de $\hat{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 70 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les intégrales

$$(i)\ \ f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \ g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 71 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les intégrales

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(xt)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 72 - Intégrale de Dirichlet : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et l'intégrale I définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 73 - Intégrale de Dirichlet : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et l'intégrale I définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\, dt \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
4. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et la valeur de I.

Exercice 74 - Intégrale de Dirichlet : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et l'intégrale I définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\, dt \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et la valeur de I.

Exercice 75 - Intégrale de Dirichlet : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2(1+t^2)}\, dt.$$

1. Montrer que f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $g'' = f$.
3. Montrer que l'on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g''(x) - g(x) = \frac{\pi}{2} - Ix \quad \text{avec} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt.$$

4. En déduire une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis de I.

Exercice 76 : On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}\, dt.$$

1. Montrer que g est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par f sur $\mathbb{R}^*$.
4. En déduire une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 77 - Intégrale de Fresnel : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et l'intégrale I définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\, dt \quad \text{et} \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-it^2}\, dt.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 78 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t} e^{-xt}\, dt - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} e^{-xt}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $f'(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

4. En déduire que l'on a l'égalité

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

Solutions partielles

Exercice 1 : Les limites sont les suivantes.

(i) $\dfrac{\pi}{2}$, (ii) 0, (iii) 1, (iv) $1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,
(v) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln(2)}{2}$, (vi) $\dfrac{\pi}{2}$, (vii) 1, $(viii)$ 1,
(ix) 0, (x) 0.

Exercice 2 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/2$ par convergence dominée.

Exercice 3 : En posant $u = x/n$, on obtient que $u_n \sim n$.

Exercice 4 : En posant $u = nx$, on obtient que $u_n \sim n^{-2}$.

Exercice 5 : Poser $u = x^n$ et utiliser le théorème de convergence dominée.

Exercice 8 : On montre que la série converge et que sa somme est égale à $1/2$ en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1\cos(kt^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}\int_0^1\frac{\cos\left((n+1/2)t^2\right)}{\cos(t^2/2)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 : Si la série convergeait, alors le théorème d'intégration terme à terme s'appliquerait. Mais l'intégrale obtenue est divergente, donc la série est divergente. Par convergence dominée, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = [\tan(t/2)]_0^{\pi/2} = 1.$$

Exercice 10 : En utilisant des intégrations par parties, on obtient que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad I_n = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 11 :

2. En posant $u = t/n$, on obtient que

$$I_n = \int_0^1\frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1\sum_{k=1}^{n}(1-u)^{k-1}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

3. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que

$$I_n-\ln(n) = I_n-\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1\frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t-\int_1^n\frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t.$$

En passant à la limite avec le théorème de convergence dominée, on a $I = \gamma$.

Exercice 12 :

1. D'une part, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que

$$J_n = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{-kx}\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

D'autre part, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ que

$$I_n-J_n = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}-\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{n\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln(n).$$

2. En utilisant le théorème de convergence dominée, on a que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers I. On en déduit avec le développement asymptotique de la série harmonique que $I = \gamma$.

Exercice 13 :

1. En posant $u = 1 - t/n$ dans l'intégrale, on obtient

$$I_n = n\int_0^1 u^n \ln(n(1-u))\,\mathrm{d}u = \frac{n}{n+1}\ln(n) + n\int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u.$$

Finalement, on remarque en utilisant une intégration par parties que

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-u)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u^k\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

2. En utilisant le théorème de convergence dominée, on a que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers I. On en déduit avec le développement asymptotique de la série harmonique que $I = -\gamma$.
3. Avec un changement de variable et une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}J &= \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+}\left(-\ln(x) - \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left((\mathrm{e}^{-x}-1)\ln(x) - \int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t\right) = -I = \gamma.\end{aligned}$$

Exercice 14 :

2. Si $\alpha > 1$, la suite converge par convergence dominée. Si $\alpha \leqslant 1$, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en remarquant à l'aide de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant \mathrm{e}^{-1/2}\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{(1-\alpha)x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 15 : En posant $u = nx$, on trouve ℓ.

Exercice 16 : En posant $u = nx$, on trouve $f(0)$ et $\pi f(0)/2$.

Exercice 19 : Pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme au (vi), on peut utiliser la majoration $|\sin(t)| \leqslant |t|$.

Exercice 22 : On trouve $\pi/4 - \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 23 : On trouve $5/3 - 2\ln(2)$.

Exercice 24 : Si la série convergeait, alors le théorème d'intégration terme à terme s'appliquerait. Mais l'intégrale obtenue est divergente, donc la série est divergente.

Exercice 25 : Si la série convergeait, alors le théorème d'intégration terme à terme s'appliquerait. Mais l'intégrale obtenue est divergente, donc la série est divergente.

Exercice 26 : Si la série $\sum u_n$ convergeait, alors le théorème d'intégration terme à terme s'appliquerait. Mais l'intégrale obtenue est divergente, donc $\sum u_n$ est divergente. En majorant v_n, on obtient que $\sum v_n$ est convergente.

Exercice 27 : L'intégrale est égale à $\mathrm{e}^{-1/4}$.

Exercice 29 :

2. Poser $u = t^n$.
4. Raisonner par l'absurde et considérer $x_0 = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \in \mathbb{R}_-^*$ avec la relation de la question précédente.

Exercice 31 : En encadrant le dénominateur, on obtient que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$. En encadrant le numérateur, on obtient que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 32 :

1. La fonction f est solution de $y' - y = \dfrac{1}{\mathrm{e}(x+1)}$.
2. Utiliser le théorème d'intégration terme à terme pour montrer que f est développable en série entière.

Exercice 33 :

3. En utilisant $u = x + t$ et une intégration par parties, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{1}{x}.$$

4. En intégrant une relation de comparaison, on a

$$f(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \left(\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \right) \underset{0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln(x).$$

Exercice 34 : On a $f(x) \underset{0^+}{\sim} 1/x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 35 :

2. Utiliser le changement de variable $u = 1/t$.
3. On a la relation

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}(1+t)} = \frac{1}{x} + O(1) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

   En utilisant la symétrie, on a $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{1-x}$.
4. Couper l'intégrale en 1 avec la relation de Chasles, puis poser $u = 1/t$ dans l'intégrale sur $]1, +\infty[$.
5. Pour tout $t \in]0,1[$, la fonction $x \mapsto t^{x-1} + t^{-x}$ admet son minimum en $x = 1/2$. En utilisant $u = \sqrt{t}$, on en déduit que la borne inférieure de f est

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \pi.$$

Exercice 37 : On déduit de l'équation différentielle que la limite de f' en 0^+ est égale à $-\infty$, donc par le théorème des accroissements finis, il en est de même pour la limite du taux d'accroissement en 0.

Exercice 39 : Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)\mathrm{e}^{-t}}{1+t^x}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t > 0 > \int_0^1 \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Exercice 41 : Pour la dernière question, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit que g est solution de (E) et que sa limite est nulle en $+\infty$, ce qui permet de conclure que $f = g$.

Exercice 42 : Poser $t = ux$.

Exercice 44 : Les deux expressions ont la même dérivée.

Exercice 45 :

1. En utilisant le théorème d'intégration terme à terme, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{2(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

2. Il suffit de remarquer que f est solution de $2y' + xy = 1$.

Exercice 46 :

3. En utilisant la relation précédente, on a $f(x) \underset{-1^+}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$.
4. Utiliser la relation de la question 2.
5. On commence par remarquer que $g(n) = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, comme la fonction f est décroissante, on a pour tout $x \in]-1, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\frac{x+n+1}{\lfloor x\rfloor + n + 2} g\big(\lfloor x\rfloor + n + 1\big) \leqslant g(x+n) \leqslant \frac{x+n+1}{\lfloor x\rfloor + n + 1} g\big(\lfloor x\rfloor + n\big).$$

   On conclut en prenant la limite lorsque $n \to +\infty$ que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 47 :

3. On a l'équivalent $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} 1/x$.
4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ l'inégalité $\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2 \geqslant 0$, ce qui implique la convexité de $\ln(\Gamma)$.

Exercice 48 : Faire un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 49 : On trouve $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{1/x} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 50 : Par la formule de Taylor avec reste intégrale, on trouve que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{f(x)}{x^n} = \int_0^1 (1-t)^{n-1} \frac{f^{(n)}(tx)}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 53 : En dérivant, on obtient que $f(x,y) = \ln(y) - \ln(x)$.

Exercice 54 : On trouve $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right)$.

Exercice 55 : En dérivant, on obtient que $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Exercice 56 : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = \frac{x}{2(x^2+4)} - \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right).$$

Exercice 57 : En dérivant, on obtient que $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$.

Exercice 58 : En dérivant, on trouve $f(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 59 :

2. Soit $x \in]-1,+\infty[$. En posant $u = \sqrt{t/(1-t)}$, on a

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+tx}\sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{(1+u^2)(1+(1+x)u^2)}\,\mathrm{d}u.$$

On en déduit en utilisant une décomposition en éléments simples que

$$f'(x) = \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x\sqrt{1+x}}.$$

3. En utilisant que $f(0) = 0$, on obtient que

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \pi \ln\left(\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{4\left(\sqrt{1+x}-1\right)}\right).$$

Exercice 60 : On trouve $f(x) = \pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 61 : On trouve $f(x) = \pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 62 :

2. On remarque pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et tout $t \in]0,1[$ que

$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{-x}{(x^2+1)(1+tx)} + \frac{x+t}{(x^2+1)(t^2+1)}.$$

On en déduit pour tout $x \in]-1,+\infty[$ que

$$f'(x) = -\frac{\ln(1+x)}{x^2+1} + \frac{\pi}{4}\frac{x}{x^2+1} + \frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

3. En calculant $f(1)$, on en déduit que $I = \dfrac{\pi\ln(2)}{8}$.

Exercice 63 : On trouve $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$. En utilisant une intégration par parties, on trouve $I = \pi\ln(2)$.

Exercice 64 :

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = \tan(t)$, on a

$$f'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x^2 \tan(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}.$$

On en déduit en utilisant une décomposition en éléments simples que

$$f'(x) = \frac{\pi}{2(|x|+1)}.$$

3. En utilisant que $f(0) = 0$, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

4. On a directement $I = f(1) = \dfrac{\pi}{2}\ln(2)$. En utilisant une intégration par parties, on a $J = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 65 :

1. Dériver pour établir la relation.
2. On trouve $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 66 :

3. On a $f(0) = \pi$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
4. On déduit des questions précédentes une expression de f, puis que $I = \sqrt{\pi}$.

Exercice 67 : En utilisant que f est solution de $y' - \dfrac{x}{2}y = 0$, on a $f(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{x^2/4}$.

Exercice 68 : En utilisant que f est solution de $y' - 2xy = 0$, on a $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{x^2}$.

Exercice 69 : En utilisant que f est solution de $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$, on a $f(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

Exercice 70 :

1. En remarquant que f est solution de $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$, on a $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.
2. En remarquant que g est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que $g(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2|x|}$.

Exercice 71 : La fonction $h = f + \mathrm{i}g$ est solution de $2(x+\mathrm{i})y' + y = 0$, donc on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{1/4}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}\right).$$

On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{1+x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1+x^2}}.$$

Exercice 72 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.
2. En posant $u = xt$, puis en coupant l'intégrale en 1 et en appliquant une intégration par parties à l'intégrale sur $]1, +\infty[$, on en déduit avec le théorème de convergence dominée que $I = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 73 :

1. Pour la continuité, couper l'intégrale en 1 et faire une intégration par parties à l'intégrale sur $]1, +\infty[$.
2. On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x) \quad \text{et} \quad I = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 74 :

2. On a $f''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 75 :

3. Utiliser une décomposition en éléments simples et des changements de variable pour faire apparaitre I.
4. En résolvant l'équation différentielle obtenue à la question 3, puis en utilisant que $g(0) = g'(0) = 0$ et que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}, \quad g(x) = \frac{\pi}{2}\left(\mathrm{e}^{-|x|} - 1 + |x|\right) \quad \text{et} \quad I = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 76 :

2. On a $f(x) = -\dfrac{2}{x}g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. En utilisant la relation précédente, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\frac{1}{x}f(x) + \frac{2}{x}(f(x) - g(x)) = \frac{1}{x}f(x) - \frac{2}{x}g(x).$$

   On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, puis en dérivant à nouveau, on obtient que $f''(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
4. En utilisant l'équation différentielle précédente et en remarquant que f est bornée et que $f(0) = \pi$, on en déduit que $f(x) = \pi\mathrm{e}^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la question 2, on en déduit que $g(x) = \dfrac{\pi}{2}(|x|+1)\mathrm{e}^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 77 :

3. En utilisant l'intégrale de Gauss, on a $f'(x) = -\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. On déduit de la question précédente avec une intégration que

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^4+1}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\mathrm{i}}{2},$$

   car les deux dernières intégrales sont égales à $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 78 :

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$.
4. En utilisant une intégration par partie sur la seconde intégrale dans la définition de f, on montre que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.