

# — Géométrie élémentaire —

## Partie I Géométrie élémentaire du plan

Dans tous les exercices de cette partie, on considère un plan affine euclidien orienté  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### I.A - Produit scalaire et déterminant

**Exercice 1 :** Déterminer la nature du triangle  $ABC$  dans chacun des cas suivants.

- (i) Les points sont définis par  $A(-1, 2)$ ,  $B(6, 6)$  et  $C(5, -2)$ .
- (ii) Les points sont définis par  $A(-2, -3)$ ,  $B(2, 4)$  et  $C(4, 1)$ .
- (iii) Les points sont définis par  $A(2, 1)$ ,  $B(-2, 1)$  et  $C(4, 3)$ .
- (iv) Les points sont définis par  $A(2, -1)$ ,  $B(-1, 2)$  et  $C(3, 1)$ .

**Exercice 2 :** Montrer qu'il n'existe pas trois points distincts du plan à coordonnées entières formant un triangle équilatéral.

**Exercice 3 :** On considère un triangle  $ABC$  du plan tel que

$$AB = 2, \quad AC = 3 \quad \text{et} \quad \widehat{CAB} = 60^\circ.$$

Calculer la longueur  $BC$ .

**Exercice 4 :** On considère un triangle  $ABC$  du plan tel que

$$AB = 2, \quad AC = 1 \quad \text{et} \quad \widehat{CAB} = 45^\circ.$$

Calculer la longueur  $BC$ .

**Exercice 5 :** On considère un triangle non aplati  $ABC$  du plan.

1. Montrer que l'on a la relation

$$\frac{BC}{|\sin(\hat{A})|} = \frac{AC}{|\sin(\hat{B})|} = \frac{AB}{|\sin(\hat{C})|}.$$

2. On suppose que  $AB = 4$ ,  $\hat{A} = 60^\circ$  et  $\hat{B} = 45^\circ$ . Calculer les longueurs  $AC$  et  $BC$ .

**Exercice 6 :** On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on considère les vecteurs du plan définis par

$$\vec{u}_m \begin{pmatrix} m+1 \\ m-1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_m \begin{pmatrix} m^2 - 2m + 1 \\ m^2 + 2m + 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  soient orthogonaux.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  soient colinéaires.

**Exercice 7 :** On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on considère les vecteurs du plan définis par

$$\vec{u}_m \begin{pmatrix} m-2 \\ m^2 - m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_m \begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  soient orthogonaux.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  soient colinéaires.

**Exercice 8 :** On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on considère les vecteurs du plan définis par

$$\vec{u}_m \begin{pmatrix} m^2 - 3m + 2 \\ m^2 - m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_m \begin{pmatrix} m+1 \\ m-1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  soient orthogonaux.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  soient colinéaires.

**I.B - Droites du plan**

**Exercice 9 :** Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de chacune des droites suivantes.

- (i) La droite  $\mathcal{D}_1$  passant par  $A(2, 3)$  et dirigée par  $\vec{u}(2, 1)$ .
- (ii) La droite  $\mathcal{D}_2$  passant par  $A(-1, 3)$  et  $B(2, 1)$ .
- (iii) La droite  $\mathcal{D}_3$  passant par  $A(2, 1)$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(-2, 3)$ .

**Exercice 10 :** On considère les points  $A(2, 3)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(1, 1)$  et le vecteur  $\vec{u}(2, 1)$ .

1. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .
2. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite  $\mathcal{D}$  dirigée par  $\vec{u}$  et passant par  $C$ .
3. Déterminer l'intersection des droites  $(AB)$  et  $\mathcal{D}$ .
4. Calculer la distance de  $C$  à  $(AB)$  et le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

**Exercice 11 :** On considère le point  $A(1, 1)$  et les droites du plan définies par

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t. \end{cases}$$

1. Déterminer l'intersection des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .
2. Déterminer une équation cartésienne des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .
3. Calculer la distance de  $A$  à  $\mathcal{D}_1$  et le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}_1$ .
4. Calculer la distance de  $A$  à  $\mathcal{D}_2$  et le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}_2$ .

**Exercice 12 :** On considère les points  $A(4, -1)$ ,  $B(-2, 2)$  et  $C(1, 1)$  du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .
2. Calculer la distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$ .
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

**Exercice 13 :** On considère les points  $A(-1, 2)$ ,  $B(5, 4)$  et  $C(2, -2)$  du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de chaque hauteur du triangle  $ABC$ .
2. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle  $ABC$ .
3. Déterminer l'aire du triangle  $ABC$ .
4. On note  $A'$  l'intersection entre  $(BC)$  et la hauteur du triangle  $ABC$  issue du point  $A$ . Calculer la longueur  $AA'$ .

**Exercice 14 :** On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on considère les points du plan définis par

$$A(2, -1), \quad B(m, 1), \quad C(0, 1) \quad \text{et} \quad D(m, -m).$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  soient parallèles.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  soient perpendiculaires.
3. Déterminer une équation cartésienne des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .
4. Déterminer l'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

**Exercice 15 :** On considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $2x + 3y = 1$ .

1. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite orthogonale à  $\mathcal{D}$  passant par le point  $A(1, 1)$ .
2. Calculer la distance du point  $A$  à la droite  $\mathcal{D}$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 16 :** On considère les trois droites du plan définies par

$$\mathcal{D}_1 : 4x + 3y - 6 = 0, \quad \mathcal{D}_2 : 3x - 4y - 2 = 0, \quad \mathcal{D}_3 : y + 6 = 0.$$

1. Déterminer les points à égale distance des droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ .
2. Quels sont les cercles tangents à ces trois droites?

**Exercice 17 :** On considère les points  $A(1, 1)$  et  $B(3, -1)$  du plan.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la médiatrice de  $[AB]$ .
2. Déterminer les points  $C$  du plan tels que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

**Exercice 18 :** On considère les points  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  et  $C(5, -2)$  du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de chaque médiane du triangle  $ABC$ .
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle  $ABC$ .

### I.C - Cercles

**Exercice 19 :** On considère les points  $A(9, 3)$ ,  $B(-3, 7)$  et  $C(-2, -3)$  du plan et la partie définie par

$$\mathcal{C} : x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0.$$

1. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{C}$ .
2. Déterminer l'intersection entre  $\mathcal{C}$  et la droite  $(AB)$ .
3. Déterminer l'intersection entre  $\mathcal{C}$  et la droite  $(AC)$ .

**Exercice 20 :** On considère les points  $A(-4, 3)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(-5, 4)$  et  $D(-3, -2)$  du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$ .
2. Déterminer l'intersection entre le cercle  $\mathcal{C}$  et la droite  $(CD)$ .

**Exercice 21 :** On considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $x + y = 3$  et l'ensemble du plan  $\mathcal{C}$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ .

1. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{C}$ .
2. Déterminer la nature de l'intersection entre  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ .
3. Déterminer l'intersection entre  $\mathcal{C}$  et la droite  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 22 :** On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on considère les parties du plan définies par

$$\mathcal{D} : x + y = 3, \quad \mathcal{C}_m : x^2 + y^2 - 4x + 2y = m.$$

1. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{C}_m$  en fonction du paramètre  $m$ .
2. Déterminer la nature de l'intersection de  $\mathcal{D}$  avec  $\mathcal{C}_m$  en fonction de  $m$ .

**Exercice 23 :** On considère les trois parties du plan définies par

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + 2x + y^2 = 0, \quad \mathcal{C}_2 : x^2 + 4x + y^2 + 2y = 0, \quad \mathcal{C}_3 : x^2 + 4x + y^2 + 2y = 4.$$

1. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$ .
2. Déterminer les intersections  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$ .

**Exercice 24 :** On considère les points  $A(-1, 2)$ ,  $B(6, 6)$  et  $C(5, -2)$  du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de chacune des médiatrices du triangle  $ABC$ .
2. Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$ .
3. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

**Exercice 25 :** On considère les points  $A(-3, 3)$ ,  $B(-1, 3)$  et  $C(-1, -1)$  du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle  $\mathcal{C}$  passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ .

## Partie II Géométrie élémentaire de l'espace

Dans tous les exercices de cette partie, on considère un espace affine  $\mathcal{E}$  euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### II.A - Produit vectoriel et produit mixte

**Exercice 26 :** On considère les points de l'espace

$$A(1, 0, 1), \quad B(-1, 1, 1), \quad C(2, 2, -1) \quad \text{et} \quad D(-2, 1, 1).$$

Déterminer le volume du parallélépipède engendré par  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

**Exercice 27 :** On fixe  $m \in \mathbb{R}$  et on considère les points de l'espace

$$A(1, 0, 1), \quad B(-1, 1, 1), \quad C(2, 2, -1) \quad \text{et} \quad D(m, 2, 1).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $m$  pour que les quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  soient coplanaires.

**Exercice 28 :** On fixe  $a \in \mathbb{R}$  et on considère les vecteurs

$$\vec{u}(1, 1, 1), \quad \vec{v}(1, 2, 4) \quad \text{et} \quad \vec{w}(1, a, a^2).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel  $a$  pour que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### II.B - Droites et plans dans l'espace

**Exercice 29 :** Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de chacun des plans suivants.

- (i) Le plan  $(\mathcal{P}_1)$  passant par  $A(1, 0, 1)$  et dirigé par  $\vec{u}(2, 1, 0)$  et  $\vec{v}(1, 1, 1)$ .
- (ii) Le plan  $(\mathcal{P}_2)$  passant par  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, -1, 1)$  et  $C(-1, -1, 2)$ .
- (iii) Le plan  $(\mathcal{P}_3)$  passant par  $A(2, 1, 1)$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(-2, 3, -1)$ .

**Exercice 30 :** On considère les quatre points

$$A(1, 1, 1), \quad B(2, -1, 1), \quad C(-1, -1, 2) \quad \text{et} \quad D(1, 1, 0).$$

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
3. Calculer la distance de  $D$  à  $(ABC)$  et le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(ABC)$ .

**Exercice 31 :** On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $x + 3y + 2z + 1 = 0$ .

1. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite orthogonale à  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A(1, 1, 1)$ .
2. Calculer la distance du point  $A(1, 1, 1)$  au plan  $\mathcal{P}$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 32 :** On considère le point  $A(1, 1, 1)$  de l'espace et on note  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $x + 2y + 3z = 0$ .

1. Calculer la distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$ .
2. Déterminer le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 33 :** On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y + z = 1$  et pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{P}_m$  le plan d'équation  $mx - y + (2 - m)z = 4 - m$ .

1. Montrer qu'il existe une droite  $\mathcal{D}$  telle que  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_m$  pour tout  $m \in \mathbb{R}$ .
2. Montrer qu'il existe un point  $A$  tel que  $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_m$  pour tout  $m \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 34 :** On considère les points  $A(1, 0, 1)$  et  $B(-1, 1, 2)$  de l'espace.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  et dirigée par le vecteur  $\vec{u}(1, 2, 3)$ .
2. Calculer la distance du point  $B$  à la droite  $\mathcal{D}$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal de  $B$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 35 :** On considère le point  $A(1, 0, -1)$  et les vecteurs  $\vec{u}(1, 2, 3)$  et  $\vec{v}(4, 5, 6)$ . On note  $\mathcal{P}_1$  le plan d'équation cartésienne  $x - y + z = 1$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_2$  passant par  $A$  et dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
2. Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ .
3. Calculer la distance de  $A$  à  $\mathcal{D}$  et le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$ .

**Exercice 36 :** On considère les points  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(-1, 2, 3)$  et  $C(2, 1, 1)$  de l'espace.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne de la droite  $(AB)$ .
2. Calculer la distance de  $C$  à la droite  $(AB)$ .
3. Déterminer le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

**Exercice 37 :** Déterminer une équation cartésienne de la droite de l'espace passant par le point  $A(2, 3, 1)$ , parallèle au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $2x - 5y + 4z = 1$  et coupant la droite  $\Delta$  d'équation

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 &= 0 \\ z - 1 &= 0. \end{cases}$$

## II.C - Sphères

**Exercice 38 :** On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $2x + y + 3z + 1 = 0$  et l'ensemble  $\mathcal{S}$  d'équation cartésienne  $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 = 11$ .

1. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{S}$ .
2. Déterminer la nature de l'intersection entre  $\mathcal{S}$  et le plan  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 39 :** On considère les points  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(1, 0, -1)$  et  $C(2, -1, -1)$  et l'ensemble  $\mathcal{S}$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 14$ .

1. Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{S}$ .
3. Déterminer la nature de l'intersection du plan  $(ABC)$  avec  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 40 :** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y + z = 4$  et l'ensemble  $\mathcal{S}_m$  d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y = m$ .

1. Déterminer la nature géométrique de  $\mathcal{S}_m$  en fonction du paramètre  $m$ .
2. Déterminer la nature de  $\mathcal{S}_m \cap \mathcal{P}$  en fonction du paramètre  $m$ .

**Exercice 41 :** Déterminer l'intersection entre la sphère de centre  $\Omega_1(1, 0, 1)$  et de rayon 3 avec la sphère de centre  $\Omega_2(0, 0, 1)$  et de rayon 2.

## — Solutions partielles —

**Exercice 1 :**

- (i) Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $B$ .
- (ii) Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .
- (iii) Le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle en  $A$ .
- (iv) Le triangle  $ABC$  est quelconque.

**Exercice 3 :** Avec le produit scalaire, on trouve que  $BC = \sqrt{7}$ .

**Exercice 4 :** Avec le produit scalaire, on trouve que  $BC = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ .

**Exercice 5 :**

- 1. Utiliser le déterminant.
- 2. En utilisant que  $\sin(\hat{C}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ , on a  $AC = 4\sqrt{3} - 4$  et  $BC = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ .

**Exercice 6 :**

- 1. Les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  sont orthogonaux si et seulement si  $m \in \{-1, 0, 1\}$ .
- 2. Les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  ne sont jamais colinéaires.

**Exercice 7 :**

- 1. Les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  sont orthogonaux si et seulement si  $m \in \left\{0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ .
- 2. Les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  sont colinéaires si et seulement si  $m = 1$ .

**Exercice 8 :**

- 1. Les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  sont orthogonaux si et seulement si  $m \in \left\{1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ .
- 2. Les vecteurs  $\vec{u}_m$  et  $\vec{v}_m$  sont colinéaires si et seulement si  $m \in \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ .

**Exercice 10 :**

- 3. Les coordonnées du point d'intersection sont  $\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$ .
- 4. La distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$  est  $\frac{1}{\sqrt{10}}$  et les coordonnées du projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  sont  $\left(\frac{13}{10}, \frac{9}{10}\right)$ .

**Exercice 11 :**

- 1. L'intersection de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est réduite au point de coordonnées  $(19, 8)$ .
- 3. La distance du point  $A$  à la droite  $\mathcal{D}_1$  est  $\frac{3}{\sqrt{10}}$  et les coordonnées du projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}_1$  sont  $\left(\frac{7}{10}, \frac{19}{10}\right)$ .
- 4. La distance du point  $A$  à la droite  $\mathcal{D}_2$  est  $\frac{4}{\sqrt{5}}$  et les coordonnées du projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}_2$  sont  $\left(\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ .

**Exercice 12 :**

- 2. La distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$  est  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .
- 3. Les coordonnées du projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  sont  $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ .

**Exercice 13 :**

- 2. Les coordonnées du centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  sont  $(1, 1)$ .
- 3. L'aire du triangle  $ABC$  est  $\frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 15$ .
- 4. La longueur  $AA' = \frac{2 \times 15}{BC} = 2\sqrt{5}$ .

**Exercice 14 :**

1. Les droites sont parallèles si et seulement si  $m \in \{-2, 1\}$ .
2. Les droites sont perpendiculaires si et seulement si  $m \in \{2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}\}$ .
4. Si  $m \notin \{-2, 1\}$ , alors les coordonnées du point d'intersection sont

$$\left( \frac{2m^2}{(m-1)(m+2)}, -\frac{m^2+m+2}{(m-1)(m+2)} \right).$$

**Exercice 17 :** Les solutions sont les points  $C(2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$  et  $C(2 - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ .

**Exercice 18 :** Les coordonnées du centre de gravité du triangle  $ABC$  sont  $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ .

**Exercice 19 :**

2. L'intersection  $\mathcal{C} \cap (AB)$  est constituée des points  $C(3, 5)$  et  $D(6, 4)$ .
3. L'intersection  $\mathcal{C} \cap (AC)$  est vide.

**Exercice 20 :** L'intersection est réduite au point de coordonnées  $(-4, 1)$ .

**Exercice 22 :**

1. Si  $m < -5$ , alors  $\mathcal{C}_m = \emptyset$ . Si  $m = -5$ , alors  $\mathcal{C}_m = \{(2, -1)\}$ .  
Si  $m > -5$ , alors  $\mathcal{C}_m$  est le cercle de centre  $(2, -1)$  et de rayon  $\sqrt{m+5}$ .
2. Si  $m < -3$ , alors  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_m = \emptyset$ . Si  $m = -3$ , alors  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_m$  est réduit à un point.  
Si  $m > -3$ , l'intersection  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}_m$  est composée de deux points.

**Exercice 23 :** L'ensemble  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  est constitué des points dont les coordonnées sont  $(0, 0)$  et  $(-1, 1)$ , tandis que  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \emptyset$  et  $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \emptyset$ .

**Exercice 24 :**

2. Les coordonnées du centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  sont  $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$ .
3. Le rayon du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  est  $\frac{5}{4}\sqrt{13}$ .

**Exercice 25 :**

1. Une équation cartésienne de  $\mathcal{C}$  est  $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$ .
2. Le cercle  $\mathcal{C}$  a pour centre  $\Omega(-2, 1)$  et pour rayon  $\sqrt{5}$ .

**Exercice 26 :** Le volume du parallélépipède est 2.

**Exercice 27 :** Les points sont coplanaires si et seulement si  $m = -3$ .

**Exercice 28 :** La famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ .

**Exercice 30 :**

2. Une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est  $2x + y + 6z - 9 = 0$ .
3. La distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  est  $\frac{6}{\sqrt{41}}$  et les coordonnées du projeté orthogonal de  $D$  sur  $(ABC)$  sont  $\left(\frac{53}{41}, \frac{47}{41}, \frac{36}{41}\right)$ .

**Exercice 31 :**

2. La distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  est  $\frac{7}{\sqrt{14}}$  et les coordonnées du projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$  sont  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ .

**Exercice 32 :**

1. La distance du point  $A$  au plan  $\mathcal{P}$  est  $\frac{6}{\sqrt{14}}$ .
2. Les coordonnées du projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{P}$  sont  $\left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)$ .

**Exercice 34 :**

2. La distance de  $B$  à la droite  $\mathcal{D}$  est  $5\sqrt{\frac{3}{14}}$ .
3. Les coordonnées du projeté orthogonal de  $B$  sur  $\mathcal{D}$  sont  $\left(\frac{17}{14}, \frac{6}{14}, \frac{23}{14}\right)$ .

**Exercice 35 :**

1. Une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}_2$  est  $x - 2y + z = 0$ .
2. La droite  $\mathcal{D}$  passe par le point  $(1, 1, 1)$  et est dirigée par le vecteur  $(1, 0, -1)$ .
3. La distance du point  $A$  à la droite  $\mathcal{D}$  est  $\sqrt{3}$  et les coordonnées du projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$  sont  $(2, 1, 0)$ .

**Exercice 36 :**

2. La distance du point  $C$  à la droite  $(AB)$  est  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ .
3. Les coordonnées du projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  sont  $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$ .

**Exercice 38 :**

1. L'ensemble  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $(2, -1, 0)$  et de rayon 4.
2. On a que  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$  est un cercle de centre  $\left(\frac{10}{7}, -\frac{9}{7}, -\frac{6}{7}\right)$  et de rayon  $4\sqrt{\frac{13}{14}}$ .

**Exercice 39 :**

1. Une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est  $x + y - z - 2 = 0$ .
2. L'ensemble  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre  $(1, 1, 0)$  et de rayon 4.
3. L'intersection de  $(ABC)$  avec  $\mathcal{S}$  est un cercle de centre  $(1, 1, 0)$  et de rayon 4.

**Exercice 40 :**

1. Si  $m < -5$ , alors  $\mathcal{S}_m = \emptyset$ . Si  $m = -5$ , alors  $\mathcal{S}_m = \{(2, -1, 0)\}$ .  
Si  $m > -5$ , alors  $\mathcal{S}_m$  est la sphère de centre  $(2, -1, 0)$  et de rayon  $\sqrt{m+5}$ .
2. Si  $m < -2$ , alors  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_m = \emptyset$ . Si  $m = -2$ , alors  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_m$  est réduit à un point.  
Si  $m > -2$ , l'intersection  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_m$  est composée de deux points.

**Exercice 41 :** L'intersection des deux sphères est le point dont les coordonnées sont  $(-2, 0, 1)$ .