Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Partie I Dérivabilité

Exercice 1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ décrivant le déplacement d'un point dans le plan. On suppose que f' et f'' ne s'annulent pas sur I.

1. Montrer que le point se déplace à vitesse constante si et seulement si le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse sont orthogonaux.
2. Montrer que le point accélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[-\pi/2, \pi/2]$.
3. Montrer que le point décélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 2 : Soient $u, v, w : [a,b] \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ avec $a < b$. On suppose que

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u'(a) \\ v(a) & v(b) & v'(a) \\ w(a) & w(b) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & u(b) & u''(c) \\ v(a) & v(b) & v''(c) \\ w(a) & w(b) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 3 : Soient E un espace euclidien et $f : [a,b] \to E$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\left\| f(b) - f(a) \right\| \leqslant (b-a) \left\| f'(c) \right\|.$$

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 5 - Wronskien : Soient $a_0, \dots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On considère des solutions $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1} y_{n-1} + \cdots + a_0 y = 0.$$

Montrer que la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$w(t) = \det\left((y_i^{(j-1)}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \right).$$

est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 6 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f''(t) \in \mathrm{Vect}(f(t))$ pour tout $t \in I$.

1. Montrer que l'application $t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que f ne s'annule pas et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ soient colinéaires. Montrer que l'image de f est contenue dans une droite.

Exercice 7 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un cercle.
3. Montrer que l'application $t \mapsto \left\| f'(t) \right\|$ est constante.

Partie II Formules de Taylor

Exercice 8 : Calculer des développements limités à l'ordre 4 des fonctions vectorielles suivantes.

$$(i)\ \ f(t) = \left((1-t)^{-1}, (1+t)^{-1}\right) \text{ en } 0, \quad (ii)\ \ f(t) = \left(\sin^2(t), \sqrt{1-t^2}\right) \text{ en } 0,$$

$$(iii)\ \ f(t) = \left(\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{\tan(t)}, \frac{\operatorname{sh}(t)}{\sin(t)}\right) \text{ en } 0, \quad (iv)\ \ f(t) = \left(\ln^2(t), t^t\right) \text{ en } 1,$$

$$(v)\ \ f(t) = \left(\mathrm{e}^{\sin(\pi t)}, t^4\right) \text{ en } 1, \quad (vi)\ \ f(t) = \left(\sin(t)\exp(t), \sin^3(t)\right) \text{ en } \pi.$$

Exercice 9 - Inégalité de Kolmogorov : Soit $f : \mathbb{R} \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que les fonctions f et f'' sont bornées.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{2}{h} \cdot \|f\|_\infty + \frac{h}{2} \cdot \|f''\|_\infty.$$

2. En déduire que f' est bornée et que $\|f'\|_\infty^2 \leqslant 4 \cdot \|f\|_\infty \cdot \|f''\|_\infty$.

Exercice 10 : Soit $f : [0,1] \to E$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f(1)\| = 1.$$

Montrer que $\|f''\|_\infty \geqslant 4$.

Partie III Intégration

Exercice 11 : Soit $f : [a,b] \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\|.$$

Solutions partielles

Exercice 1 : Calculer la dérivée de la vitesse $t \mapsto v(t) = \|f'(t)\|$.

Exercice 2 : Utiliser le théorème de Rolle deux fois avec la fonction

$$t \mapsto \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(t) & v(t) & w(t) \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 : Utiliser le théorème des accroissements finis avec la fonction

$$\varphi : t \mapsto \langle f(b) - f(a) \mid f(t) \rangle.$$

Exercice 4 : On a $D_n'(x) = D_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, donc $D_n(x) = x^n / n!$.

Exercice 5 : En dérivant et en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, on trouve $w' = a_{n-1} w$.

Exercice 6 :

1. La fonction $v : t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante, car sa dérivée est nulle.
2. On a que $f(I)$ est inclus dans le plan vectoriel de vecteur normal $v(a)$.
3. Il existe un réel $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tel que $f'(t) = \lambda(t) f(t)$. On en déduit le résultat en résolvant l'équation différentielle composante par composante.

Exercice 8 : En utilisant les développements limités usuels, on trouve

$$(i)\quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$$

$$(ii)\quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/8 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$$

$$(iii)\quad f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 13/45 \\ 1/18 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$$

$$(iv)\quad f(1+t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 11/12 \\ 1/3 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$$

$$(v)\quad f(1+t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\pi \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \pi^2/2 \\ 6 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} -\pi^4/8 \\ 1 \end{pmatrix} t^4 + o(t^4),$$

$$(vi)\quad f(\pi+t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\pi} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\pi} \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{\pi}/3 \\ -1 \end{pmatrix} t^3 + o(t^4).$$

Exercice 9 : Utiliser une formule de Taylor pour établir la première inégalité. Pour obtenir la seconde inégalité, minimiser la majorant en fonction de h dans l'inégalité.

Exercice 10 : Utiliser la formule de Taylor entre 0 et 1/2, puis entre 1/2 et 1.

Exercice 11 : Écrire $f(t) = \int_a^t f'(u)\,du$, puis majorer.