

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tous les exercices, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = P(x)e^x.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de E .
3. Montrer que la dérivation induit un automorphisme de E .

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble

$$E = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 3 : Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. On considère l'ensemble

$$E_k = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P^{(k)}(1) = 0\}.$$

1. Montrer que E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la dimension de E_k .

Exercice 4 : On note E l'ensemble des fonctions 2π -périodiques $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la famille $(\cos^0, \cos^1, \dots, \cos^n)$ est libre.
3. Étudier la dimension de E .

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble

$$E = \{a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_{n-k} = a_k\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 6 : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'ensemble

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' + \alpha f' + \beta f = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 7 : On considère l'ensemble des suites arithmétiques

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists r \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la dimension de E .

Exercice 8 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la dimension de E .
3. Montrer que la famille $((\omega^n)_{n \in \mathbb{N}})_{\omega \in \mathbb{U}_p}$ est une base de E .

Exercice 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. On définit l'ensemble

$$E = \{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad f|_{[x_k, x_{k+1}]} \text{ est affine}\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Déterminer la dimension de E .

Partie II Sous-espaces vectoriels et dimension finie

Exercice 10 : Soient F , G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que l'on a l'inégalité

$$\dim(F + G + H) \leq \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(G \cap H) - \dim(H \cap F) + \dim(F \cap G \cap H).$$

Exercice 11 : Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie où $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$.

1. Montrer que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si

$$\dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \sum_{k=1}^p \dim(F_k).$$

2. Montrer que somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si l'inégalité précédente est une égalité.

Exercice 12 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère un couple d'endomorphismes $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0_E\}$.

1. Montrer que la somme des sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u + \lambda v)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ est directe.
2. En déduire que si E est de dimension finie, alors il existe un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $au + bv \in \text{GL}(E)$.

Exercice 13 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est non nulle.

Exercice 14 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 15 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F admet au moins deux supplémentaires distincts.

Exercice 16 : Soient $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $E = F_1 + \dots + F_r$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1 \subset F_1, \dots, G_r \subset F_r$ tels que $E = G_1 \oplus \dots \oplus G_r$.

Exercice 17 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. On note

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_p = \text{Im}(u^p), \quad N_p = \text{Ker}(u^p).$$

1. Montrer que $(I_p)_{p \geq 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p \geq 0}$ est croissante.
2. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
3. Soit r le plus petit des entiers s considérés ci-dessus. Montrer que

$$\forall s \geq r, \quad I_s = I_r, \quad N_s = N_r.$$

4. Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E .

Exercice 18 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que si $\text{Ker}(u^{k+1}) = \text{Ker}(u^k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $\text{Ker}(u^{k+2}) = \text{Ker}(u^{k+1})$.
2. Montrer que si l'endomorphisme u est nilpotent et si l'espace vectoriel E est de dimension finie, alors $u^{\dim(E)} = 0$.
3. Soit $\Delta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'endomorphisme de dérivation. Existe-t-il un endomorphisme $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ tel que $\Delta = \delta^2$?

Exercice 19 : Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux d'un espace vectoriel E de dimension finie n . On note

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad F_k = \text{Im}(u_{k+1} \circ \dots \circ u_n).$$

1. Montrer que si $F_k \neq \{0\}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors $F_{k+1} \subsetneq F_k$.
2. En déduire que $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0$.

Exercice 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) On a l'égalité $u^2 = 0$.
- (ii) Il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ p = 0$ et $p \circ u = u$.
- (iii) Il existe un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ p - p \circ u = u$.

Exercice 21 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note

$$F = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit S un supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans E . Montrer que F est isomorphe au sous-espace vectoriel $\mathcal{L}(S, \text{Ker } f)$.
3. En déduire la dimension de F .

Exercice 22 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On note

$$F_1 = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = 0\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = 0\}.$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que F_1 est isomorphe à $\mathcal{L}(E, \text{Ker}(f))$. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel F_1 .
3. Soit S un supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans E . Montrer que F_2 est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(S, E)$. En déduire la dimension de F_2 .

Exercice 23 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $f \mapsto u \circ f \circ v$ est une application linéaire.
2. Soit S un supplémentaire de $\text{Im}(v)$ dans E . Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\text{Im}(v), \text{Ker}(u)) \times \mathcal{L}(S, E)$.
3. En déduire le rang de φ .

Partie III Familles d'un espace de dimension finie

Exercice 24 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad H_k = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $H_k(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $x \in \mathbb{Z}$.
3. Caractériser les polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 25 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $P_k = X^k(1-X)^{n-k} \in \mathbb{K}[X]$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 26 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit

$$P_k = \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^n (X - \ell).$$

Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 27 : Soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application définie par $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est une application linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P .
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Delta^k(P) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(X+i).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $P \in \mathbb{R}_n[X]$ pour la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 28 : Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit

$$\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto P(a_k).$$

1. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k).$$

Exercice 29 : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère une base $(X_1, \dots, X_m)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ et une base $(Y_1, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \{X_i Y_j \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exercice 30 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un ensemble X . Montrer qu'une famille $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est libre si et seulement si il existe $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$ où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad v_k = (f_1(x_k), \dots, f_n(x_k)).$$

Exercice 31 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un vecteur $a \in E$ de sorte que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E . On note

$$C = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $C = \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$.
3. Déterminer la dimension de C .

Exercice 32 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^p)$ soit liée.
2. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(f) = 0$.
3. Montrer que si $f \in \text{GL}(E)$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $f^{-1} = P(f)$.

Exercice 33 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E .

1. Montrer que si $f^n \neq 0$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est libre.
2. En déduire que si E est de dimension finie, alors $f^{\dim(E)} = 0$.

Exercice 34 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = 0.$$

1. Montrer que f est nilpotent.
2. Le résultat est-il vrai si E n'est pas de dimension finie?

Exercice 35 : Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E . Montrer que si $\mathcal{G}$ est une sous-famille de $\mathcal{F}$, alors on a

$$\text{rang}(\mathcal{G}) \geq \text{rang}(\mathcal{F}) + \text{Card}(\mathcal{G}) - \text{Card}(\mathcal{F}).$$

Partie IV Applications linéaires et dimension finie

IV.A - Exercices d'applications

Exercice 36 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \exists Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}.$$

Exercice 37 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad P \mapsto (P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)).$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 38 : Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. On définit

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad P \mapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)).$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 39 : Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. On définit

$$\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}, \quad P \mapsto (P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n)).$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 40 - Résultant : Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non constants. On note $(a, b) = (\deg(A), \deg(B))$ et on définit $\varphi : \mathbb{K}_{b-1}[X] \times \mathbb{K}_{a-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}_{a+b-1}[X]$ par

$$\forall (U, V) \in \mathbb{K}_{b-1}[X] \times \mathbb{K}_{a-1}[X], \quad \varphi(U, V) = UA + VB.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Montrer que φ est bijective si et seulement si $A \wedge B = 1$.

Exercice 41 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On définit

$$f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer le degré de $f(X^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
3. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(P) = Q \quad \text{et} \quad P(0) = P'(0) = 0.$$

Exercice 42 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\varphi_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_P(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, l'application φ_P est polynomiale de degré au plus n .
2. Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi_P$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 43 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ constitué uniquement de fonctions de signe constant.

Exercice 44 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ constitué de fonctions monotones.

1. Montrer que si I est un segment, alors $\dim(E) \leq 2$.
2. Montrer que $\dim(E) \leq 2$ sans hypothèse sur I .
3. Décrire les sous-espaces vectoriels constitués de fonctions monotones.

Exercice 45 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\text{rang}(f'_1, \dots, f'_n) \geq n-1$.

IV.B - Exercices théoriques

Exercice 46 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $u^3 = 0$.

1. Montrer que $\text{rang}(u) + \text{rang}(u^2) \leq \dim E$.
2. Montrer que $2\text{rang}(u^2) \leq \text{rang}(u)$.

Exercice 47 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) On a l'égalité $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.
- (ii) On a l'égalité $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.
- (iii) On a la décomposition $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- (iv) Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \text{GL}(E)$.

Exercice 48 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $\text{rang}(f) = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. Montrer que $\lambda = 1$ si et seulement si $f - \text{Id}_E$ n'est pas injective.

Exercice 49 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\dim f(G) = \dim G - \dim(G \cap \text{Ker } f).$$

2. Montrer que si H est un sous-espace vectoriel de F , alors

$$\dim f^{-1}(H) = \dim(H \cap \text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker } f).$$

Exercice 50 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $\text{rang}(\varphi) = 1$ si et seulement si il existe une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle et un vecteur $v \in E$ non nul tels que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = f(x)v.$$

Exercice 51 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g).$$

Exercice 52 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\dim \text{Ker}(f + g) \leq \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g)).$$

Exercice 53 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que

$$\text{rang}(f + g) = \text{rang}(f) + \text{rang}(g) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \\ \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = E. \end{cases}$$

Exercice 54 : Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Montrer que si $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, alors on a

$$\text{rang}(f) + \text{rang}(g) - \dim E \leq \text{rang}(f \circ g) \leq \min(\text{rang}(f), \text{rang}(g)).$$

2. Pour tout $(r, s) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, déterminer l'ensemble

$$\mathcal{R}(r, s) = \{\text{rang}(f \circ g) \mid (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{rang}(f) = r \text{ et } \text{rang}(g) = s\}.$$

Exercice 55 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que l'on a l'inégalité

$$|\text{rang}(f) - \text{rang}(g)| \leq \text{rang}(f + g) \leq \text{rang}(f) + \text{rang}(g).$$

2. En déduire que si $f \circ g = 0$ et $f + g$ est inversible, alors

$$\text{rang}(f) + \text{rang}(g) = \dim E.$$

Exercice 56 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que

$$\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v) = E.$$

Montrer que les sommes sont directes.

Exercice 57 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que

$$u + v = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rang}(u) + \text{rang}(v) \leq \dim(E).$$

Montrer que u et v sont des projecteurs complémentaires.

Exercice 58 - Inégalité de Frobenius : Montrer que pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$ où E est espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\text{rang}(u \circ v) + \text{rang}(v \circ w) \leq \text{rang}(v) + \text{rang}(u \circ v \circ w).$$

Exercice 59 : Soient $p_1, \dots, p_r \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie vérifiant

$$p_1 + \dots + p_r = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad p_i^2 = p_i.$$

Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$ avec $i \neq j$.

Exercice 60 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^r = \text{Id}_E$ pour $r \in \mathbb{N}^*$. On note

$$p = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} u^k.$$

1. Montrer que p est un projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$.
2. Montrer que

$$\dim \text{Ker}(u - \text{Id}_E) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \text{tr}(u^k).$$

Exercice 61 : Soient E un espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$. On note

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

1. Montrer que p est un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im}(p) = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$.
3. En déduire la relation $\text{Card}(G) \text{rang}(p) = \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$.

IV.C - Définition d'une application linéaire avec une base

Exercice 62 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère une base $(u_1, \dots, u_n)$ de E et on définit l'application $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F^n$ par

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \varphi(f) = (f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

1. Montrer que l'application φ est un isomorphisme.
2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 63 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ si et seulement si $\dim(E)$ est pair.

Exercice 64 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) On a $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$.
- (ii) Il existe une base $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$ de l'espace vectoriel E tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(u_k) = 0 \quad \text{et} \quad f(v_k) = u_k.$$

(iii) On a $f^2 = 0$ et $\dim(E) = 2 \text{rang}(f)$.

(iv) On a $f^2 = 0$ et il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$.

Exercice 65 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. A quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(F) = G$?
2. A quelle condition existe-t-il $f \in \text{GL}(E)$ tel que $f(F) = G$?
3. A quelle condition existe-t-il $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Ker } f = F$ et $\text{Im } f = G$?

Exercice 66 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est un élément régulier de l'anneau $\mathcal{L}(E)$, i.e.

$$\exists v \in \mathcal{L}(E), \quad u = u \circ v \circ u.$$

Exercice 67 : Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que

$$\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(v) \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(F, G), \quad v = f \circ u.$$

2. Soient $(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$. Montrer que

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(w) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad w = a \circ u + b \circ v.$$

Exercice 68 : Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v) \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E, F), \quad u = v \circ f.$$

2. Soient $(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$. Montrer que

$$\text{Im}(w) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad w = u \circ a + v \circ b.$$

Exercice 69 : Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces de dimension finie.

1. Montrer que u est injectif si et seulement si il existe un élément $f \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\text{Id}_E = f \circ u$.
2. Montrer que u est surjectif si et seulement si il existe un élément $f \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\text{Id}_F = u \circ f$.

Exercice 70 : Soient E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que f est injectif si et seulement si

$$(\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0).$$

2. Montrer que f est surjectif si et seulement si

$$(\forall g \in \mathcal{L}(F), \quad g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0).$$

Exercice 71 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe $(p, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ où p est un projecteur et g un isomorphisme tel que $f = g \circ p$.
2. Montrer qu'il existe $(p, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ où p est un projecteur et g un isomorphisme tel que $f = p \circ g$.

Partie V Formes linéaires

Exercice 72 : Soient $f_1, \dots, f_p, f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que

$$f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f).$$

Exercice 73 : Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'application

$$\varphi : \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^p, \quad f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_p)).$$

1. Montrer que φ est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
2. Montrer que φ est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Exercice 74 : Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. On considère

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^p, \quad x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

1. Montrer que φ est surjective si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
2. Montrer que φ est injective si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Exercice 75 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Identifier les endomorphismes $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les hyperplans de E .

Exercice 76 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On définit

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \varphi_i : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad P \mapsto P(a_i).$$

1. Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i).$$

Exercice 77 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\varphi_A : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_A(P) = \int_0^1 A(t)P(t) dt.$$

1. Montrer que φ_A est une application linéaire pour tout $A \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ définie par $\varphi(A) = \varphi_A$ pour tout $A \in \mathbb{R}_n[X]$ est un isomorphisme.
3. Le résultat de la question 2 est-il vrai en remplaçant $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 78 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $\varphi_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi_M(N) = \text{tr}(MN).$$

1. Montrer que φ_M est une application linéaire pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ définie par $M \mapsto \varphi_M$ est un isomorphisme.
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
 - (i) Il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AX + XA = B$.
 - (ii) Pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AC + CA = 0$, on a $\text{tr}(BC) = 0$.

Partie VI Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

VI.A - Généralités

Exercice 79 : Soient I, J, K trois points d'un plan affine $\mathcal{P}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Les points I, J et K sont alignés.
- (ii) Il existe un point $M \in \mathcal{P}$ tel que

$$\det(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + \det(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) + \det(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) = 0.$$

- (iii) Pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a

$$\det(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + \det(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) + \det(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) = 0.$$

Exercice 80 : Dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois droites

$$\mathcal{D} : ax + by = c, \quad \mathcal{D}' : a'x + b'y = c', \quad \mathcal{D}'' : a''x + b''y = c''.$$

Montrer que $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 81 : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère deux plans non parallèles

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0, \quad \mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Soit $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Montrer qu'un plan $\mathcal{Q}$ contient $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ non nul tel qu'une équation de $\mathcal{Q}$ soit

$$\alpha(ax + by + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Exercice 82 : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

Exercice 83 : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de dimension finie d'un espace affine $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{H}$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}$.

Exercice 84 : Dans $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}, \quad \mathcal{D}_a : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}.$$

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_a$ sont-elles coplanaires?
2. Donner alors l'équation du plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_a$.

VI.B - Équations affines

Exercice 85 : Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Résoudre l'équation

$$\alpha X + \text{tr}(X)A = B, \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 86 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + X^\top = \text{tr}(X)A, \quad X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 87 : Résoudre l'équation

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = X, \quad P \in \mathbb{R}[X].$$

— Solutions partielles —

Exercice 10 : Utiliser la formule de Grassmann et $F \cap H + G \cap H \subset (F + G) \cap H$.

Exercice 12 : La démonstration est analogue à celle du lemme des noyaux.

Exercice 13 : En utilisant la formule de Grassmann montrer par récurrence sur l'entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ que l'intersection de k hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins $n-k$.

Exercice 14 : Faire une récurrence descendante sur p .

Exercice 16 : Effectuer une récurrence sur r .

Exercice 24 : Pour la question 2, on peut effectuer une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ en utilisant la relation $H_k(X+1) - H_k(X) = H_{k-1}(X)$ et $H_k(k) = 1$. Pour la dernière question, il suffit de substituer X par $0, 1, \dots, n$ pour obtenir que les coordonnées de P dans la base $(H_0, \dots, H_n)$ sont entières.

Exercice 27 : Pour la dernière question, notons $\mathcal{F}_P$ la famille étudiée. Il est clairement nécessaire que $\deg(P) = n$. Réciproquement, si $\deg(P) = n$, on déduit des questions précédentes que $F = \text{Vect}(\mathcal{F}_P)$ contient $\Delta^k(P)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, donc on a $F = \mathbb{R}_n[X]$. Comme $\text{Card}(\mathcal{F}_P) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, on en déduit que $\mathcal{F}_P$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 30 : Pour le sens direct, on démontre la contraposée. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs $((f_1(x), \dots, f_n(x)))$ pour $x \in X$ n'est par hypothèse pas égal à $\mathbb{K}^n$, donc il est contenu dans un hyperplan, ce qui permet de conclure.

Exercice 35 : Utiliser la formule de Grassmann.

Exercice 42 : Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est dans $\text{Ker}(\varphi)$ si et seulement si on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^1 t^k P(t) dt = 0 \Leftrightarrow \forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t) Q(t) dt = 0.$$

En prenant $Q = P$, on conclut que P est le polynôme nul.

Exercice 43 : Supposons qu'il existe une fonction $f \in F$ non nulle et fixons un élément $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$. L'hypothèse sur F implique que le sous-espace vectoriel $D = \{(g(a), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid g \in F\}$ est de dimension 1 pour tout $x \in I$. On en déduit que $f(a)g(x) = g(a)f(x)$ pour tout $x \in I$, donc $F = \text{Vect}(f)$.

Exercice 44 :

1. Si on note $I = [a, b]$, il suffit de montrer que l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi : f \mapsto (f(a), f(b))$ est injective.
2. L'intervalle I est une réunion croissante de segments I_n pour $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $F_n = \{f|_{I_n} \mid f \in F\}$ est un espace vectoriel vérifiant $\dim(F_n) \leq 2$. On en déduit qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(F_n) = \dim(F_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Finalement, on vérifie que si $\mathcal{B}$ est une famille de F telle que $\mathcal{B}_N = \{f|_{I_N} \mid f \in \mathcal{B}\}$ est une base de F_N , alors $\mathcal{B}_n = \{f|_{I_n} \mid f \in \mathcal{B}\}$ est une base de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, puis que $\mathcal{B}$ est une base de F .
3. Si E ne contient pas la fonction $x \mapsto 1$, alors $E \oplus \text{Vect}(x \mapsto 1)$ est un espace vectoriel ne contenant que des fonctions monotones. On conclut que

$$E = \{0\}, \quad E = \text{Vect}(f) \quad \text{ou} \quad E = \text{Vect}(f, x \mapsto 1)$$

où f est une fonction monotone.

Exercice 45 : Considérer l'application de dérivation sur $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

Exercice 46 : Appliquer le théorème du rang à la restriction de f à $\text{Im}(u)$.

Exercice 47 : Pour montrer que (iii) implique (iv), on peut définir v comme étant le projecteur sur $\text{Ker}(u)$ parallèlement à $\text{Im}(u)$ et vérifier que $\text{Ker}(u+v) = \{0\}$. Pour montrer que (iv) implique (iii), remarquer que $\dim(E) = \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$ en utilisant l'inégalité $\text{rang}(u+v) \leq \text{rang}(u) + \text{rang}(v)$.

Exercice 51 : Utiliser la restriction de f à $\text{Ker}(g \circ f)$.

Exercice 52 : Utiliser la restriction de f à $\text{Ker}(f+g)$.

Exercice 57 : Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(v) = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(\text{Id}_E - u)$.

Exercice 58 : Appliquer le théorème du rang à u restreint à $\text{Im}(v \circ w)$ et à $\text{Im}(v)$.

Exercice 59 : Avec l'hypothèse et la trace, on obtient $E = \text{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \text{Im}(p_r)$.

Exercice 60 : En utilisant que $p \circ u = p$, on obtient que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$. Il suffit de prendre la trace pour obtenir la seconde égalité.

Exercice 61 : En utilisant que $p \circ g = p$ pour tout $g \in G$, on obtient que $\text{Im}(p) = F$. Il suffit de prendre la trace pour obtenir la dernière égalité.

Exercice 64 : Pour définir g , imposer $g(u_k) = g(v_k) = v_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Exercice 67 : Appliquer le résultat de la question 1 à $\varphi = (u, v) \in \mathcal{L}(E, E^2)$.

Exercice 68 : Appliquer le résultat de la question 1 à l'application $\varphi : E^2 \rightarrow E$ définie par $\varphi : (x, y) \mapsto u(x) + v(y)$.

Exercice 78 : L'implication directe est évidente. Pour la réciproque, on introduit l'application linéaire $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(X) = AX + XA$ pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'implication directe montre que $\text{Im}(f) \subset \varphi(\text{Ker}(f))^\circ$. On en déduit la réciproque en montrant que l'inclusion précédente est une égalité en utilisant la dimension.

Exercice 83 : On trouve

$$\dim(\mathcal{H}) = \begin{cases} \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) & \text{si } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \\ \dim(\mathcal{F}) + \dim(\mathcal{G}) - \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) + 1 & \text{si } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset. \end{cases}$$

Exercice 84 : Les droites sont coplanaires pour $a = -4$. Elles sont dans le plan d'équation $x - 5y + 3z = -9$.