Dérivabilité des fonctions

Partie I Dérivabilité d'une fonction en un point

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

(i) $f(x)=\sqrt{x^2-x^3}$, (ii) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, (iii) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}$,

(iv) $f(x)=\left(x^2-1\right)\text{Arccos}\left(x^2\right)$, (v) $f(x)=x\sin\left(x^{-1}\right)$, (vi) $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$.

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2(x)-1}{x}$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(3x)}{\sin(2x)+\sin(4x)}$, (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$, (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\ln\left(1+x^3\right)}$,

(vii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)\sin(x-1)}{x^3-3x+2}$, $(viii)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$, (ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x)}{\sin(x)}$,

(x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\ln(x))}{x}$, (xi) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)\ln(1-x)$, (xii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 3 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a\in\mathbb{R}$. Déterminer

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}\right).$$

Exercice 4 : Soit $f:I\to\mathbb{C}$ une fonction dérivable. Montrer que $|f|:I\to\mathbb{R}$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas et exprimer sa dérivée.

Exercice 5 : On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admet une dérivée symétrique en un point $a\in\mathbb{R}$ si la fonction $\Delta:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall h\in\mathbb{R}^*,\quad \Delta(h)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

1. Montrer que si la fonction f est dérivable à gauche et dérivable à droite en a, alors f admet une dérivée symétrique en a.
2. Étudier la réciproque de la propriété précédente.

Exercice 6 - Fonction höldérienne : Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ avec $\alpha>1$. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^\alpha.$$

Exercice 7 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)-nf(0).$$

Exercice 8 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right)=0.$$

Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.

Exercice 9 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a\in\mathbb{R}$. Montrer que si $f'(a)\neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(x)\neq f(a)$ pour tout $x\in I\setminus\{a\}$.

Partie II Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

II.A - Études de fonctions

Exercice 10 : Étudier les fonctions suivantes.

$$(i)\ \ f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2},\qquad (ii)\ \ g(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}\qquad (iii)\ \ h(x)=\frac{(x+4)}{(x-2)^2(x+2)}.$$

Exercice 11 : Étudier les fonctions suivantes.

$$(i)\ \ f(x)=(x^2-2x-2)\mathrm{e}^x,\qquad (ii)\ \ g(x)=(x^3+5x^2+9x+7)\mathrm{e}^{-x}.$$

Exercice 12 : Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a l'inégalité

$$x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x.$$

Exercice 13 : Montrer que pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, on a l'inégalité

$$\frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x.$$

Exercice 14 : Soit $p\in\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $p\in[0,1]$ si et seulement si

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\quad (x+y)^p\leqslant x^p+y^p.$$

2. Montrer que $p\in[1,+\infty[$ si et seulement si

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\quad x^p+y^p\leqslant (x+y)^p.$$

Exercice 15 : Montrer pour tout $x\in\,]0,1[$, l'inégalité $x^x(1-x)^{1-x}\geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 16 : On considère la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

1. Montrer que $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 17 : Déterminer le maximum de l'ensemble $\{n^{1/n}\mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

Exercice 18 : Soit $0<a\leqslant b$. On considère la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Montrer que f est croissante.

Exercice 19 - Lemme de Grönwall : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq 0$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(0)=0$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f'(x)\leqslant af(x)+b.$$

Montrer que l'on a l'inégalité

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)\leqslant b\frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{a}.$$

II.B - Tangentes à la courbe représentative d'une fonction dérivable

Exercice 20 : Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 21 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 de ces fonctions sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 de ces fonctions sont concourantes.

Exercice 22 : Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les tangentes au points d'abscisse x_0 aux courbes des solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b$ sont parallèles ou concourantes.

Exercice 23 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si et seulement si la fonction f' est croissante.

II.C - Propriétés de la fonction dérivée

Exercice 24 : Déterminer une relation entre $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{Arctan}\left(e^x\right), \quad g(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)), \quad h(x) = \operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Exercice 25 : Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = 0$ ou $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 26 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \sup\left(\left\{f'(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b]\right\}\right).$$

Montrer que f est une fonction affine.

Exercice 27 : Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| + |1 + f'(x)| \leqslant 1.$$

Exercice 28 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ et $f'(c) \leqslant 0$.

Exercice 29 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $a_0 > 0$. On considère le polynôme $P = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0) \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si $r \in [0, +\infty[$ est une racine de P, alors $P'(r) > 0$.
2. En déduire que P admet une unique racine dans $[0, +\infty[$.

Exercice 30 : Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} P^{(k)}(x) > 0.$$

Exercice 31 - Théorème de Rolle en l'infini : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 - Théorème de Rolle en l'infini : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$f(0) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 - Théorème de Darboux : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que si $0 \in [f'(a), f'(b)]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que si $\lambda \in [f'(a), f'(b)]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \lambda$.

II.D - Dérivation d'application réciproque

Exercice 34 - Fonction W de Lambert : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

1. Dresser le tableau de variation de f et déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'origine.
2. Démontrer que f induit une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.
3. En notant W l'application réciproque de f, montrer que W est dérivable sur l'intervalle $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[, \quad W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

Exercice 35 : Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I.

Exercice 36 : Démontrer que les fonctions suivantes sont bijectives de leur ensemble de définition sur un intervalle à préciser, puis donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $x = 0$.

$$(i) \;\; f : x \mapsto -1 + \mathrm{e}^{x-1} + \ln(x), \qquad\qquad (ii) \;\; f : x \mapsto 4x + \sin^4(x).$$

II.E - Dérivabilité et équations fonctionnelles

Exercice 37 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\lambda| \neq 1$. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Exercice 38 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)^2.$$

Exercice 39 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables en 1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f\left(x^2\right) = 2f(x).$$

Exercice 40 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables en 1 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f\left(x^2\right) = f(x)^2.$$

Exercice 41 : On souhaite déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (R)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la relation (R). Montrer que la fonction f est dérivable.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 42 : On souhaite déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y). \qquad (R)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la relation (R). Montrer que la fonction f est dérivable.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 43 : On souhaite déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\quad f(xy)=f(x)+f(y).\qquad (R)$$

1. Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la relation (R). Montrer que la fonction f est dérivable.
2. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 44 : On souhaite déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)f(y).\qquad (R)$$

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant la relation (R). Montrer que la fonction f est dérivable.
2. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues vérifiant (R).

Exercice 45 : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq 0$ et $a\neq 1$. On souhaite déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant la relation

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(f(x))=ax+b.\qquad (R)$$

1. Supposons qu'il existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant (R).
   (a) Justifier que f est bijective et en déduire que $a>0$.
   (b) Montrer que f est une fonction affine.
2. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant (R).

Exercice 46 : Déterminer les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(y)-f(x)=(y-x)\cdot f'\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 47 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ non constante vérifiant $f\circ f=f$.

1. Montrer que $f'(f(x))^2=f'(f(x))$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
2. En déduire que $f(x)=x$ pour tout $x\in f(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Partie III Dérivées d'ordres supérieures

III.A - Généralités

Exercice 48 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes.

$$(i)\ f(x)=\left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{2x},\qquad (ii)\ f(x)=\mathrm{e}^x\cos(x),\qquad (iii)\ f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}\sin(x),$$
$$(iv)\ f(x)=\left(1-x^2\right)^{-1},\qquad (v)\ f(x)=\ln\left(1-x^2\right),\qquad (vi)\ f(x)=x^2\sin(x),$$
$$(vii)\ f(x)=\cos^3(x),\qquad (viii)\ f(x)=x^2(1+x)^n,\qquad (ix)\ f(x)=x^{n-1}\ln(1+x).$$

Exercice 49 : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a+ib$ une racine n-ième de l'unité. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f:x\mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$.

Exercice 50 : On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction Arctan.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n\left(f(x)\right)\sin\left(nf(x)+n\frac{\pi}{2}\right).$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $f^{(n)}(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 51 : Soit $n\in\mathbb{N}$. On définit la fonction $h:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ par $h(x)=x^n\mathrm{e}^{1/x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. Montrer que h est dérivable $n+1$ fois et que l'on a

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad h^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}\mathrm{e}^{1/x}.$$

Exercice 52 : Soit $n\in\mathbb{N}$. On définit les fonctions $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $L_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad h_n(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}\quad\text{et}\quad L_n(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{n!}h_n^{(n)}(x).$$

Montrer que L_n est polynomiale de degré n et calculer son coefficient dominant.

Exercice 53 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de H_n.
3. Montrer que $H'_{n+1} = -2(n+1)H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 54 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

Exercice 55 : Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x \mapsto \left(1-x^2\right)^{-1/2}$.
Montrer que $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$.

Exercice 56 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $h : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1. Montrer que h est dérivable n fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n)}(x) = n!\left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right).$$
2. En déduire que l'on a la relation
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 57 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux manières différentes la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto x^{2n}$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

III.B - Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Exercice 58 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 59 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 60 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 61 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Partie IV Théorèmes sur les fonctions dérivables

IV.A - Théorème de Rolle

Exercice 62 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si la fonction f' ne s'annule pas, alors la fonction f n'est pas périodique.

Exercice 63 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$

Exercice 64 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ un entier avec $n \geqslant 2$.

1. Montrer que si n est pair, alors le polynôme $P = X^n + aX + b$ admet au plus deux racines réelles distinctes.
2. Montrer que si n est impair, alors le polynôme $P = X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 65 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet au plus $\deg(P) + 1$ solutions $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 66 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Montrer que l'équation $P(x) = \cos(x)$ admet un nombre fini de solutions $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 67 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) + \alpha f(c) = 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) + cf(c) = 0$.

Exercice 68 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois telle que

$$f(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.

Exercice 69 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b)f'(b) < 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 70 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ passant par $(d, 0)$.

Exercice 71 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(a) = f(b) \quad \text{et} \quad f'(a) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(c, f(c))$ passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$.

Exercice 72 - Théorème de Flett : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f'(a) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(c, f(c))$ passe par le point de coordonnées $(a, f(a))$.

Exercice 73 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racine simple sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé à racine simple sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 74 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que le polynôme $P' + aP$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 75 : Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable telle que

$$f(-1) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P(0) = f(0), \quad P(-1) = 0, \quad P'(0) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 1.$$

2. En déduire qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f'''(c) = 3$.

Exercice 76 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application n fois dérivable s'annulant en $n+1$ points distincts de l'intervalle I.

1. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée $(n-1)$-ième de la fonction $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle I.

Exercice 77 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable telle que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0.$$

Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

Exercice 78 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit les fonctions $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \left(x^2-1\right)^n \quad \text{et} \quad L_n(x) = h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que L_n est une fonction polynomiale de degré n.
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
3. Montrer que L_n admet exactement n racines distinctes dans $]-1,1[$.

Exercice 79 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $f^{(k)}$ s'annule un nombre fini de fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\ell \in [\![1, k-1]\!]$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f^{(\ell)}(x) = \lim_{x \to -\infty} f^{(\ell)}(x) = 0.$$

2. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}$ s'annule au moins $k-1$ fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 80 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$f(0) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $f^{(n)}(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 81 - Règle de L'Hôpital : Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

2. En déduire que si $f'(x)/g'(x)$ tend vers ℓ lorsque $x \to a^+$, alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

3. Déterminer la limite suivante.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\cos(x) - \exp(x)}{(x+1)\exp(x) - 1} \right).$$

Exercice 82 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Montrer que si $a, b, c \in I$ sont trois points distincts, alors il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(d).$$

Exercice 83 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction $n \in \mathbb{N}^*$ fois dérivable qui s'annule en n points $x_1 < \cdots < x_n$. Soit $a \in [x_1, x_n]$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que

$$f(a) = (a - x_1) \cdots (a - x_n) \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

Exercice 84 - Formule de Taylor-Lagrange : Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $n+1$ fois sur $[a, b]$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Exercice 85 - Formule d'Euler-Maclaurin : Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable 3 fois sur $[a, b]$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)\frac{f'(a) + f'(b)}{2} - (b-a)^3 \frac{f^{(3)}(c)}{12}.$$

IV.B - Théorème des accroissements finis

Exercice 86 : Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 87 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'encadrement

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Exercice 88 : Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a l'encadrement

$$x < \operatorname{Arcsin}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 89 : Déterminer la limite suivante.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\exp(\sin(x)) - \exp(\tan(x))}{\sin(x) - \tan(x)} \right).$$

Exercice 90 : Déterminer la limite suivante.

$$\lim_{x \to \pi/4} \left(\frac{\ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))}{\sin(x) - \cos(x)} \right).$$

Exercice 91 : Déterminer la limite suivante.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Exercice 92 : Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$$

Exercice 93 : Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}.$$

1. Montrer que la suite de terme général $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ converge vers 0.
2. En déduire qu'il existe une infinité d'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \notin \mathbb{N}$.

Exercice 94 : On considère deux fonctions $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $b - a$ ne s'annule pas et

$$\lim_{x \to 0} a(x) = \lim_{x \to 0} b(x) = \ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\mathrm{e}^{-1}\}.$$

Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes.

$$(i) \quad \frac{b^a - a^a}{b - a}, \qquad (ii) \quad \frac{b^a - a^b}{b^b - a^a}.$$

Exercice 95 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que la fonction f'' est décroissante. Montrer que

$$f(b) - f(a) \geqslant (b-a)\frac{f'(a)+f'(b)}{2}.$$

Exercice 96 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que f' admette une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 97 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' admette une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ell x$.

Exercice 98 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) \underset{+\infty}{\sim} x^{-1}$. Montrer que l'on a l'équivalent $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 99 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Montrer que pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, il existe $c \in]a-h, a+h[$ tel que

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h^2 f''(c).$$

Exercice 100 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que

$$f'(x_1) + \cdots + f'(x_n) = n.$$

Exercice 101 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$. Montrer que si f' est continue en a, alors il existe un intervalle ouvert I contenant le point a tel que la restriction de la fonction f à I soit injective.

Exercice 102 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $f' > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geqslant mx$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 103 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x) = g(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 104 - Dérivabilité uniforme : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad \left(0 < |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(x)\right| < \varepsilon\right).$$

IV.C - Inégalité des accroissements finis

Exercice 105 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
4. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-6}$.

Exercice 106 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n).$$

1. Montrer que la fonction cos admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par cos.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
4. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_N - \alpha| \leqslant 10^{-6}$.

Exercice 107 : Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction dérivable telle que

$$\exists M \in [0,1[, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f'(x)| \leqslant M.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$.
2. Montrer que la suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers α.

Exercice 108 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et

$$\exists A \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant A|f(x)|.$$

1. Montrer que si la fonction f s'annule en un point $a \in \mathbb{R}$, alors f est nulle sur l'intervalle $\left[a-(2A)^{-1}, a+(2A)^{-1}\right]$.
2. En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 109 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f est lipschitzienne si et seulement si la fonction f' est bornée.

Exercice 110 : Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est lipschitzienne.

Exercice 111 : Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est lipschitzienne.

Exercice 112 - Nombres de Liouville : On considère une racine $x \in \mathbb{R}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left|x - \frac{a}{b}\right| \geqslant \frac{C}{b^n}.$$

Solutions partielles

Exercice 5 : La réciproque est fausse avec $f(t)=\sqrt{|t|}$ et $a=0$.

Exercice 6 : En majorant le taux d'accroissement, on obtient que $f'=0$, donc f est constante.

Exercice 7 : Avec un développement limité de f à l'ordre 1, on trouve $\frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 8 : Soit $\varepsilon>0$. Pour tout x suffisamment proche de 0 et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{x}{2^k}\right)-f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|x|}{2^{k+1}}\leqslant\varepsilon|x|.$$

En passant à la limite et en utilisant la continuité en 0, on obtient le résultat.

Exercice 10 : On obtient les tableaux de variations suivants.

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
g	0	↘	$\frac{\sqrt{3}-2}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{\sqrt{3}+2}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

x	$-\infty$		-6		-2		-1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
h	0	↗	2^{-7}	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Exercice 11 : On obtient les tableaux de variations suivants.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	$6\mathrm{e}^{-2}$	↘	$-2\mathrm{e}^{2}$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	e^{2}	↘	$2\mathrm{e}$	↗	$22\mathrm{e}^{-1}$	↘	0

Exercice 15 : Étudier le logarithme de la fonction.

Exercice 17 : En passant par une étude de fonction, on obtient $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 18 : Étudier le numérateur de $f'(x)$ pour obtenir le signe de f'.

Exercice 19 : Étudier la fonction $\varphi : t\mapsto (af(t)+b)\mathrm{e}^{-at}$.

Exercice 22 : Si y est solution de l'équation, l'équation de la tangente en x_0 est

$$y-y(x_0)=\big(a(x_0)y(x_0)+b(x_0)\big)(x-x_0).$$

Si $a(x_0)=0$, alors les tangentes sont toutes parallèles. Dans le cas contraire, les tangentes sont concourantes au point

$$\left(x_0-\frac{1}{a(x_0)},\frac{-b(x_0)}{a(x_0)}\right).$$

Exercice 24 : En dérivant, on trouve $g(x)=2f(x)-\pi/2$ et $h(x)=f(x)-\pi/4$.

Exercice 25 : La dérivée de la fonction f^2 est nulle, donc f^2 est constante. On en déduit que f est constante par continuité.

Exercice 26 : Étudier la fonction $x \mapsto f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$.

Exercice 27 : On a $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ et $-2 \leqslant f'(x) \leqslant 0$, donc f est une fonction bornée et décroissante. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$, alors on a

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad |1 + f'(x)| \leqslant 1 - |f(x)| = 1 + f(x) \leqslant 1 + f(a).$$

On en déduit que $f'(x) \leqslant f(a) < 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est impossible. De la même manière, on montre qu'il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > 0$, donc la fonction f est nulle.

Exercice 28 : On montre avec le théorème des valeurs intermédiaires que f s'annule sur $]a, b[$. Il suffit ensuite de considérer $c = \inf\{x \in]a, b[| f(x) = 0\}$.

Exercice 29 : Pour la première question, vérifier que $nP(r) - rP'(r) < 0$.

Exercice 30 : On a la relation $P = Q - Q'$. On en déduit le résultat en introduisant la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} Q(x)$.

Exercice 31 : Remarquer que f admet un minimum global en un point $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 32 : Remarquer que f admet un extremum global en un point $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 33 :

1. Se ramener au cas où $f'(a) < 0 < f'(b)$ et considérer un point $c \in [a, b]$ où est atteint le minimum de f.
2. Introduire la fonction $x \mapsto f(x) - \lambda x$.

Exercice 37 : On a nécessairement $f(0) = 0$. Quitte à remplacer λ par λ^{-1}, on peut supposer que $|\lambda| < 1$.Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$f(x) = \frac{f(\lambda^n x)}{\lambda^n} = \frac{f(0) + f'(0)\lambda^n x + o(\lambda^n)}{\lambda^n} = f'(0)x + o(1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0)x.$$

Les solutions sont les fonctions linéaires.

Exercice 38 : On remarque que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x}{2^n}\right)^{2^n} \\ &= \left(f(0) + f'(0)\frac{x}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \exp\left(f'(0)x\right) & \text{si} \quad f(0) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad f(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 39 : On remarque que $f(1) = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$f(x) = 2^n f\left(x^{1/2^n}\right) = 2^n \left(f(1) + f'(1)\left(x^{1/2^n} - 1\right) + o\left(x^{1/2^n} - 1\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(1)\ln(x).$$

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto a\ln(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 40 : On remarque que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on a

$$f(x) = f\left(x^{1/2^n}\right)^{2^n} = 2^n \left(f(1) + f'(1)\left(x^{1/2^n} - 1\right) + o\left(x^{1/2^n} - 1\right)\right)^{2^n}.$$

On en déduit que

$$f(x) = f\left(x^{1/2^n}\right)^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} x^{f'(1)} & \text{si} \quad f(1) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad f(1) = 0. \end{cases}$$

Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto x^a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 41 :

1. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. En intégrant par rapport à y la relation (R), on obtient

   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x+y) - F(x) = yf(x) + F(y).$$

   En prenant $y = 1$, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Les solutions sont les fonctions linéaires.

Exercice 42 :

1. Si f est nulle, c'est évident. Si $f \neq 0$, alors la primitive F de f vérifiant $F(0) = 0$ n'est pas nulle et en intégrant par rapport à y la relation (R), on obtient
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x+y) - F(x) = f(x)F(y).$$
On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 43 :

1. Soit F la primitive de f qui s'annule en 1. En intégrant par rapport à y la relation (R), on obtient
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{F(xy) - F(x)}{x} = (y-1)f(x) + F(y).$$
En prenant $y = 2$, on en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto a\ln(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 44 :

1. Si f est nulle, c'est évident. Si $f \neq 0$, alors la primitive F de f vérifiant $F(1) = 0$ n'est pas nulle et en intégrant par rapport à y la relation (R), on obtient
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{F(xy) - F(x)}{x} = f(x)F(y).$$
On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Les solutions sont la fonction nulle et les fonctions $x \mapsto x^a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 45 :

1. La relation implique $f(ax+b) = af(x) + b$ pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, puis en dérivant $f'(ax+b) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En distinguant le cas $0 < a < 1$ et le cas $a > 1$ et en utilisant une suite, on en déduit que f' est constante sur $\mathbb{R}$.
2. Les solutions du problème sont deux fonctions affines.

Exercice 46 : En dérivant en x puis en y, on obtient que les solutions sont les fonctions polynômiales de degré au plus deux.

Exercice 47 :

1. Il suffit de dériver la relation et de la réutiliser pour obtenir le résultat.
2. On déduit de la question précédente que $f'(f(x)) \in \{0, 1\}$. Comme f n'est pas constante et que f' est continue, on en déduit que $f'(f(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x + C$ pour tout $x \in f(\mathbb{R})$. En injectant dans la relation fonctionnelle, on obtient que $C = 0$.
3. Supposons que $f(\mathbb{R})$ admet une borne supérieure $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a par continuité que $f(a) = a$ et $f'(a) = 1$. En particulier, f prend des valeurs plus grandes que a, ce qui contredit l'existence de a. En procédant de même pour la borne inférieure, on conclut que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 50 :

1. Faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Les solutions sont $\operatorname{cotan}(k\pi/n)$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Exercice 51 : Par récurrence : en écrivant $x^n e^{1/x} = xx^{n-1}e^{1/x}$, on obtient
$$\left(x^n e^{1/x}\right)^{(n+1)} = x\left((x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)},$$
puis il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure.

Exercice 55 : Appliquer la formule de Leibniz à la relation $(1-x^2)f'(x) = xf(x)$.

Exercice 56 :

1. Faire une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Utiliser la formule de Leibniz.

Exercice 61 : Vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 63 : Appliquer la théorème de Rolle à $t \mapsto at^4 + bt^3 + ct^2 - (a+b+c)t$.

Exercice 65 : Faire une récurrence sur le degré de P.

Exercice 66 : Faire une récurrence sur le degré de P.

Exercice 67 :

1. Introduire la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$.
2. Introduire la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{t^2/2}$.

Exercice 68 : Introduire la fonction $\varphi(t) = (f(t) - f'(t))\mathrm{e}^{t}$.

Exercice 70 : Introduire la fonction $h(t) = f(t)/(t-d)$.

Exercice 71 : Applique le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad \forall x \in \,]a,b], \quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Exercice 72 : On introduit la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad \forall x \in \,]a,b], \quad \varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Il suffit de prouver φ' s'annule sur $]a,b[$. Si $\varphi(b) = \varphi(a)$, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle. Si $\varphi(b) > \varphi(a)$, on remarque que $\varphi'(b) < 0$, donc il existe un couple $(\alpha,\beta) \in \,]a,b[^2$ tel que $\alpha < \beta$ et $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, ce qui permet de conclure avec le théorème de Rolle.

Exercice 74 : Les racines multiples de P sont aussi des racines de $P' + aP$. On construit d'autres racines du polynôme $P' + aP$ en appliquant le théorème de Rolle à la fonction $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{ax}$.

Exercice 75 :

1. On obtient que $P(X) = \frac{1}{2}X^3 + \left(\frac{1}{2} - f(0)\right)X^2 + f(0)$.
2. Appliquer la théorème de Rolle à la fonction $t \mapsto f(t) - P(t)$.

Exercice 76 : Pour la seconde question, introduire $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$.

Exercice 78 :

2. On a $L_n(1) = 2^n n!$ et $L_n(-1) = (-1)^n 2^n n!$ par la formule de Leibniz.
3. Faire une récurrence sur $k \in [\![0,n]\!]$ comptant les racines de $h_n^{(k)}$.

Exercice 79 :

1. Pour tout $\ell \in [\![1,k-1]\!]$, on déduit de l'hypothèse que $f^{(\ell)}$ est monotone au voisinage de $\pm\infty$, donc $f^{(\ell)}$ admet une limite en $\pm\infty$. Comme f est bornée, cette limite est nécessairement nulle.
2. Supposons que $f^{(k)}$ s'annule un nombre fini de fois sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question précédente et le théorème de Rolle classique et en l'infini, on obtient par récurrence que $f^{(\ell)}$ s'annule au moins $\ell - 1$ pour tout $\ell \in [\![1,k-1]\!]$.

Exercice 80 : Si la fonction $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[x_n,+\infty[$, alors la fonction $f^{(n)}$ est strictement monotone sur $[x_n,+\infty[$, donc elle admet une limite ℓ en $+\infty$. Si $\ell = 0$, alors on en déduit que $f^{(n+1)}$ s'annule sur $[x_n,+\infty[$ par le théorème de Rolle. Si $\ell \neq 0$, on en déduit que la fonction f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Exercice 81 : Introduire la fonction

$$\varphi(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a)).$$

Exercice 82 : Appliquer la théorème de Rolle à la fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - K(b-x)(x-a)$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante choisie pour avoir $\varphi(c) = 0$.

Exercice 83 : Si $a \in \{x_1,\dots,x_n\}$, alors le résultat est évident. Dans le cas contraire, appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle avec la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x) = f(x) - K(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante choisie pour avoir $\varphi(a) = 0$.

Exercice 84 : Appliquer la théorème de Rolle à la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{K}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante choisie pour avoir $\varphi(a) = 0$.

Exercice 85 : Appliquer la théorème de Rolle à la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) = f(b) - f(x) - (b-x)\frac{f'(x)+f'(b)}{2} + K(b-x)^3$$

où $K \in \mathbb{R}$ est une constante choisie pour avoir $\varphi(a) = 0$.

Exercice 87 : L'inégalité est équivalente à $(x+1)^{-1} < \ln(x+1) - \ln(x) < x^{-1}$.

Exercice 93 : Pour la seconde question, on aurait dans le cas contraire avec la première question de l'exercice que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait affine à partir d'un certain rang.

Exercice 94 :

(i) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto t^{a(x)}$ sur l'intervalle $[a(x), b(x)]$, on obtient que la limite est ℓ^ℓ.

(ii) En utilisant trois fois le théorème des accroissements finis et en écrivant

$$\frac{b^a - a^b}{b^b - a^a} = \frac{1}{b^b - a^a}\left(\left(b^a - a^a\right) + \left(b^a - a^b\right)\right),$$

on obtient que la limite est $\dfrac{1-\ln(\ell)}{1+\ln(\ell)}$.

Exercice 95 : Étudier la dérivée de la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f'(a)+f'(x)}{2}.$$

Exercice 98 : Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \geqslant A$, on a

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=A}^{\lfloor x\rfloor - 1}\frac{1}{k+1} \leqslant f(x) - f(A) \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=A}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{k}.$$

Exercice 99 : Considérer la fonction $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.

Exercice 100 : Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis sur chaque intervalle $[k/n, (k+1)/n]$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. On conclut en sommant les égalités obtenues.

Exercice 103 : Poser $g(x) = f(\sqrt{x})$.

Exercice 104 : Utiliser le théorème des accroissements finis et le théorème de Heine appliqué à f'.