Courbes et surfaces dans l'espace

Dans tous les exercices, on considère un espace affine $\mathscr{E}$ euclidien orienté de dimension 3 muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie I Courbes de l'espace

Exercice 1 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) & = & \dfrac{1+\cos(t)}{2} \\ y(t) & = & \dfrac{\sin(t)}{2} \\ z(t) & = & t. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(0)$.
3. Déterminer les projections orthogonales de $\mathscr{C}$ sur les plans (xOy) et (xOz).

Exercice 2 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) & = & t \\ y(t) & = & t^2 \\ z(t) & = & t^3+1. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles au plan d'équation $4x+6y+3z=0$.

Exercice 3 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) & = & t \\ y(t) & = & t^2 \\ z(t) & = & t^3. \end{cases}$$

Montrer que la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOy) est une parabole.

Exercice 4 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) & = & t^2-1 \\ y(t) & = & 2t \\ z(t) & = & t^2+t+1. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est plane.
4. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est une parabole.

Exercice 5 - Courbe de la crêpe : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) & = & a\cos(t) \\ y(t) & = & a\sin(t) \\ z(t) & = & b\sin(2t). \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(\pi/4)$.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur un cylindre d'axe (Oz).

Exercice 6 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & 1 \\ x+z & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Quelle est la nature géométrique de la courbe $\mathscr{C}$?
2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Donner en ces points une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la projection orthogonale de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOy).

Exercice 7 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 1 \\ x^2+z^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Donner en ces points une représentation paramétrique de la tangente à $\mathscr{C}$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.
5. Déterminer la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOz).

Exercice 8 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+xy & = & 1 \\ y^2+z^2+yz & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est la réunion de deux courbes planes.
2. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Donner en ces points un vecteur tangent à $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la projection de $\mathscr{C}$ sur le plan (xOz).

Exercice 9 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2+z^2 & = & 1 \\ x^2+y^2 & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Déterminer les points réguliers de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les projections orthogonales sur les trois plans de coordonnées de la courbe $\mathscr{C}$.

Partie II Surfaces de l'espace

Exercice 10 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u^2+uv+v^2 \\ y(u,v) &= u+v \\ z(u,v) &= u^3+v^3. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M(1,-1)$.

Exercice 11 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= \dfrac{\cos(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ y(u,v) &= \dfrac{\sin(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ z(u,v) &= \dfrac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)}. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 12 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u+v \\ y(u,v) &= 4uv \\ z(u,v) &= u^2+v^2. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble des points stationnaires de $\mathscr{S}$ est une courbe plane dont on précisera la nature.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M(1,0)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 13 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(u,v) &= u\cos(v) \\ y(u,v) &= u\sin(v) \\ z(u,v) &= u^2. \end{cases}$$

1. Déterminer les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 14 - Cône : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$x^2+y^2-z^2=0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.

Exercice 15 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$3x^2+4xy+2yz+4xz=0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.

Exercice 16 - Tore : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation

$$(x^2+y^2+z^2+3)^2-16(x^2+y^2)=0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $(3,0,0)$.

Exercice 17 : Déterminer les points de la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x^2-y^2+z^2=1$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan d'équation $2x+y-z=0$.

Exercice 18 : Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x = 8yz$ contenant la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x+4z+2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 19 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $z^3 = xy$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les plans tangents à $\mathscr{S}$ contenant la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2 & = & 0 \\ y-3z-3 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 20 : On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $xyz = 1$ et $A \in \mathscr{S}$.

1. Déterminer une équation du plan tangent $\mathscr{P}_A$ à la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de l'origine sur le plan $\mathscr{P}_A$.

Exercice 21 : Déterminer le lieu des projetés orthogonaux de O sur les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Partie III Surfaces remarquables

III.A - Surfaces représentatives d'une fonction

Exercice 22 : Soit $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

On fixe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent en M.

Exercice 23 : Soit $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}.$$

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $O = (0, 0, 0)$.
2. Déterminer la position locale de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent en O.

Exercice 24 : Soit $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln(x) - \ln(y).$$

On fixe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de $\mathscr{S}$ par rapport à son plan tangent en M.

III.B - Surfaces réglées

Exercice 25 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathscr{D}_t$ de l'espace passant par le point $A_t(t,t,t^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}_t(0,2,t)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 26 - Cylindre : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x-2)^2+4y^2 &=& 1 \\ z &=& 0. \end{array}\right.$$

Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on considère la droite $\mathscr{D}_A$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,2,3)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par $(\mathscr{D}_A)_{A\in\mathscr{C}}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 27 - Cylindre : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+2y^2-z &=& 0 \\ x+y+z &=& 0. \end{array}\right.$$

Pour tout $A \in \mathscr{C}$, on considère la droite $\mathscr{D}_A$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par $(\mathscr{D}_A)_{A\in\mathscr{C}}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 28 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $(x+z)^2+2y^2=2$.

1. Soit $M_0 \in \mathscr{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par M_0.
2. La surface $\mathscr{S}$ est-elle réglée ?

Exercice 29 : Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $x^2-y^2=2z^3$.

1. Soit $M_0 \in \mathscr{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par M_0.
2. La surface $\mathscr{S}$ est-elle réglée ?

Exercice 30 : Montrer que la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z=x^3-3xy$ est réglée.

Exercice 31 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(u,v) &=& uv \\ y(u,v) &=& u \\ z(u,v) &=& v^2. \end{array}\right.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner en ces points une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$.
3. Montrer que la surface $\mathscr{S}$ est réglée.
4. Déterminer une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 32 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) &=& t \\ y(t) &=& t^2 \\ z(t) &=& t^3. \end{array}\right.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{T}_t$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point $M(t)$. On désigne par $\mathscr{S}$ la réunion des droites $\mathscr{T}_t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les points stationnaires de $\mathscr{S}$ pour le paramétrage obtenu, puis déterminer une équation du plan tangent à la surface aux points réguliers.
3. Montrer que tous les points réguliers d'une même génératrice $\mathscr{T}_t$ ont le même plan tangent.

Exercice 33 : Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) &= at \\ y(t) &= bt^3 \\ z(t) &= c(t^2+1). \end{cases}$$

Soit $\mathscr{S}$ la surface engendrée par les droites parallèles au plan (xOy) et qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points.

1. Déterminer une paramétrisation de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer l'ensemble des points de $\mathscr{S}$ pour lesquels le plan tangent passe par le point O.

Exercice 34 - Hyperboloïde à une nappe : Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3$. On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

1. On considère le point $A_\theta(a\cos(\theta), b\sin(\theta), 0)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Montrer qu'il existe exactement deux droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par A_θ.
2. Montrer que si $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $x^2+y^2 = u^2+v^2$, alors
$$\exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x &= u\cos(\theta) - v\sin(\theta) \\ y &= u\sin(\theta) + v\cos(\theta). \end{cases}$$
3. En déduire deux familles de droites engendrant $\mathscr{S}$, puis montrer que toute droite incluse dans $\mathscr{S}$ est dans l'une des deux familles précédentes.

III.C - Surfaces de révolution

Exercice 35 : On considère la droite Δ de l'espace d'équation

$$\begin{cases} x &= z \\ y &= z. \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution $\mathscr{S}$ d'axe Δ et de rayon 1.

Exercice 36 : On considère la droite Δ de l'espace d'équation

$$\begin{cases} x &= z+2 \\ y &= z+1. \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne du cylindre de révolution $\mathscr{S}$ d'axe Δ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 37 : On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ par

$$\begin{cases} x(t) &= \cos^2(t) \\ y(t) &= \sin(t) \\ z(t) &= \cos(2t). \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une courbe plane.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
3. Que peut-on dire des méridiennes de cette surface ?

Exercice 38 : On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ par

$$\begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t) \\ z(t) &= \cos(2t). \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 39 : Soit $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$. Déterminer une équation cartésienne du cône de révolution $\mathscr{S}$ de sommet O, d'axe (Oz) et de demi-angle au sommet θ.

Exercice 40 : On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = & 0 \\ x + z & = & 1. \end{array}\right.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 41 : On considère la courbe $\mathscr{C}$ de l'espace paramétrée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t \\ y(t) & = & t^2 - 1 \\ z(t) & = & t - t^2. \end{array}\right.$$

On note $\mathscr{S}$ la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe $\mathscr{C}$ autour de la droite d'équation cartésienne $x - 1 = z - y = 0$.

1. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est plane.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 42 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la surface de révolution $\mathscr{S}$ obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & 3z^2 + \lambda^2. \end{array}\right.$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 43 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace d'équation

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = \lambda^2 \left(x^2 - y^2 - z^2\right).$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.
2. Tracer une méridienne de la surface $\mathscr{S}$.

Exercice 44 : On considère la surface $\mathscr{S}$ de l'espace d'équation

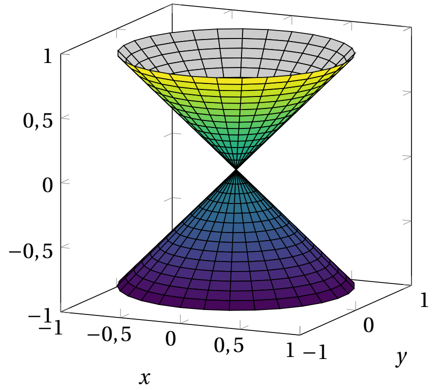
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.
2. Tracer une méridienne de la surface $\mathscr{S}$.

Solutions partielles

Exercice 14 :

1. On commence par tracer la surface $\mathscr{S}$.



En notant $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, on a $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$. Ainsi, la surface $\mathscr{S}$ admet un unique point singulier qui est $(0,0,0)$.

2. Par définition, l'équation cartésienne du plan tangent en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$ est

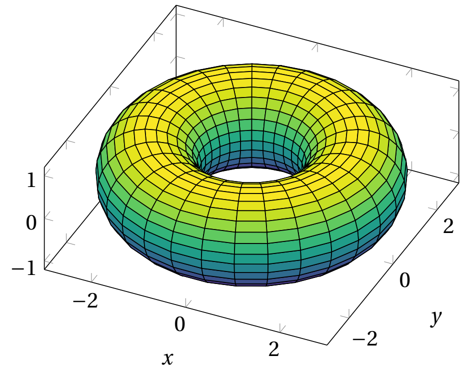
$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0x+y_0y-z_0z-(x_0^2+y_0^2-z_0^2) = 0.$$

Comme $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{S}$, on a $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, donc l'équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en (x_0, y_0, z_0) se simplifie en

$$x_0x + y_0y - z_0z = 0.$$

Exercice 16 :

1. On commence par tracer la surface $\mathscr{S}$.



En notant $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+3)^2 - 16(x^2+y^2)$, on a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2+z^2+3) - 32x \\ 4y(x^2+y^2+z^2+3) - 32y \\ 4z(x^2+y^2+z^2+3) \end{pmatrix}.$$

On considère un point singulier $(x,y,z) \in \mathscr{S}$. La troisième équation implique que $z = 0$. En factorisant dans les deux premières expressions, on est amené à considérer deux cas.

- Si $x^2 + y^2 \neq 5$, on déduit des deux premières équations que $x = y = z = 0$. Cependant $(0,0,0) \notin S$, donc on ne trouve pas de point singulier dans ce cas.
- Si $x^2 + y^2 = 5$, on a

$$f(x,y,z) = (5+0+3)^2 - 16 \cdot 5 = -16 \neq 0,$$

ce qui contredit $(x,y,z) \in \mathscr{S}$, donc on ne trouve pas non plus de point singulier dans ce cas là.

Finalement, la surface $\mathscr{S}$ n'a pas de point singulier.

2. Par définition, l'équation cartésienne du plan tangent en $(3,0,0) \in \mathscr{S}$ est

$$48(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

Exercice 19 :

1. En notant $f(x,y,z) = z^3 - xy$, on a $\nabla f(x,y,z) = (-y,-x,3z^2)$, donc la surface $\mathscr{S}$ admet un unique point singulier qui est $(0,0,0)$.
2. Par définition, l'équation de la tangente en $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S} \setminus \{(0,0,0)\}$ est

$$-y_0(x-x_0)-x_0(y-y_0)+3z_0^2(z-z_0)=0 \;\Leftrightarrow\; -y_0x-x_0y+3z_0^2z-+2x_0y_03z_0^3=0.$$

Comme $(x_0,y_0,z_0) \in \mathscr{S}$, on a $f(x_0,y_0,z_0)=0$, donc l'équation se simplifie en

$$-y_0x-x_0y+3z_0^2z-x_0y_0=0.$$

D'autre part, une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y &=& 3t \\ z &=& -1+t. \end{array}\right.$$

Si $\mathscr{D}$ est inclus dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ la relation

$$-2y_0-3tx_0+3z_0^2(t-1)-x_0y_0=0 \quad\Leftrightarrow\quad t(3z_0^2-3x_0)-(2y_0+3z_0^2+x_0y_0)=0.$$

On en obtient ainsi le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_0^3 &=& x_0y_0 \\ z_0^2 &=& x_0 \\ 2y_0+3z_0^2+x_0y_0 &=& 0. \end{array}\right.$$

En résolvant ce système avec $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, on en déduit que les solutions du problème sont les plans tangents à $\mathscr{S}$ en $(1,-1,-1)$ et en $(4,-2,-2)$.

Exercice 22 : L'équation du plan tangent en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ est

$$z = 2x_0x+2y_0y-x_0^2-y_0^2.$$

La surface est au-dessus de son plan tangent.

Exercice 23 :

L'équation du plan tangent en $(0,0,0)$ est $z=y$. La surface $\mathscr{S}$ traverse son plan tangent en $(0,0,0)$.

Exercice 24 : L'équation du plan tangent en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ est

$$z = \frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0} + \ln(x_0) - \ln(y_0).$$

La surface $\mathscr{S}$ traverse son plan tangent en tout point $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Exercice 37 : On a $x^2+y^2-z^2/4=3/4$.

Exercice 44 : On a $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.