

— Courbes planes —

Dans tous les exercices, on considère un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I Courbes planes paramétrées

Exercice 1 : On considère la courbe paramétrée par $f : t \mapsto (\text{ch}(t), \text{sh}(t))$.

1. Montrer que la courbe admet une tangente dont on précisera une équation cartésienne en chacun de ses points.
2. Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée.

Exercice 2 : On considère la courbe paramétrée par $f : t \mapsto (3t^2, 2t^3)$.

1. Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée.
2. Montrer que la courbe admet une tangente dont on précisera une équation cartésienne en chacun de ses points.
3. Déterminer les droites qui sont à la fois tangentes et normales à cette courbe.
4. Déterminer l'orthoptique de la courbe, i.e. l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes à la courbe orthogonales entre elles.

Exercice 3 : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= 3t^2 - 1 \\ y(t) &= 3t^3 - t. \end{cases}$$

1. Montrer que la courbe admet un unique point double.
2. Déterminer une mesure de l'angle entre les deux tangentes en ce point.

Exercice 4 : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= (t+1)\exp(t) \\ y(t) &= t^2 \exp(t). \end{cases}$$

1. Montrer que la courbe admet un unique point stationnaire.
2. Tracer la courbe paramétrée au voisinage de ce point.
3. Étudier les branches infinies de la courbe.

Exercice 5 : Pour chacune des fonctions d'une variable réelle ci-dessous, étudier les branches infinies de sa courbe représentative.

$$(i) h : t \mapsto \frac{t^3 + 1}{t^2 - 3t + 2}, \quad (ii) h : t \mapsto \sqrt{t^2 + 2t + 4}.$$

Exercice 6 : Pour chacune des courbes paramétrées ci-dessous, déterminer ses points d'inflexions et préciser une équation de la tangente en ces points.

$$(i) f : t \mapsto (e^t, t^2), \quad (ii) f : t \mapsto ((t-2)^3, t^2 - 4).$$

Exercice 7 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(t^2 + 2t, \frac{1+2t}{t^2} \right).$$

Exercice 8 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}, \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} \right).$$

Exercice 9 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2} \right).$$

Exercice 10 : On considère la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{t}{t^2 - 1}, \frac{t^2}{t - 1} \right).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Montrer que la courbe paramétrée par f admet un unique point double.
3. Montrer que les deux tangentes en ce point double sont orthogonales.

Exercice 11 : On considère la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto (\exp(\sin(2t)), \exp(\cos(t))).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Montrer que la courbe paramétrée par f admet un unique point double.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à la courbe en ce point.

Exercice 12 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{e^t}{1+t}, \frac{te^t}{1+t} \right).$$

Exercice 13 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{\sin^2(t)}{2 + \sin(t)}, \cos(t) \right).$$

Exercice 14 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\sin(t), \frac{\sin(t)}{2 + \cos(t)} \right).$$

Exercice 15 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto (2 \cos(2t), \sin(3t)).$$

Exercice 16 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto (\cos(2t) + 2 \cos(t), \sin(2t)).$$

Exercice 17 - Néphroïde : Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto (3 \cos(t) - \cos(3t), 3 \sin(t) - \sin(3t)).$$

Exercice 18 - Courbe de Lissajous : Tracer la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto (\cos(3t), \sin(2t)).$$

Exercice 19 - Lemniscate de Bernoulli : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Comparer les points $M(1/t)$ et $M(t)$. Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ?
2. Tracer la courbe paramétrée par f .

Exercice 20 - Folium de Descartes : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right).$$

1. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Comparer les points $M(1/t)$ et $M(t)$. Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ?
2. Tracer la courbe paramétrée par f .
3. Montrer qu'une équation cartésienne de la courbe est $x^3 + y^3 = 3xy$.

Exercice 21 - Strophoïde droite : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, t \frac{1-t^2}{1+t^2} \right).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Soit $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels t_1, t_2 et t_3 pour que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ soient alignés.

Exercice 22 : On considère l'ellipse $\mathcal{C}$ paramétrée par

$$f : t \mapsto (\sqrt{5} \cos(t), \sin(t)).$$

Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par O et tangents à $\mathcal{C}$.

Partie II Propriétés métriques des courbes planes

Exercice 23 : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 1 \\ y(t) = 3t^3 - t. \end{cases}$$

1. Déterminer le point double de la courbe.
2. Calculer la longueur de la boucle de la courbe.

Exercice 24 : On considère la fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h : t \mapsto \exp(t)$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h .

Exercice 25 : On considère la fonction $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h : t \mapsto t^{3/2}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h .

Exercice 26 : On considère la courbe paramétrée par $f :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ où

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \begin{cases} x(t) = \cos^2(t) + \ln(\sin(t)) \\ y(t) = \sin(t) \cos(t). \end{cases}$$

Calculer la longueur de cette courbe entre ses deux points de rebroussement.

Exercice 27 - Quadrifolium : On considère les fonctions vectorielles

$$f : t \mapsto (\cos(t) \sin^2(t), \sin(t) \cos^2(t)) \quad \text{et} \quad g : t \mapsto (2 \cos(t), \sin(t)).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Montrer que les courbe paramétrées par f et g ont la même longueur.

Exercice 28 - Chainette : On considère la courbe paramétrée par $t \mapsto (t, \text{ch}(t))$.

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f .
2. Calculer la courbure de la courbe.
3. Déterminer la développée de la courbe.

Exercice 29 - Spirale logarithmique : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\lambda \neq 1$. On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= \lambda^t \cos(t) \\ y(t) &= \lambda^t \sin(t). \end{cases}$$

1. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f .
2. Déterminer le repère de Frenet associé à f .
3. Calculer la courbure de f .
4. Déterminer la développée de f et l'interpréter géométriquement.

Exercice 30 - Astroïde : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= \cos^3(t) \\ y(t) &= \sin^3(t). \end{cases}$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Déterminer la longueur de la courbe.
3. Déterminer le repère de Frenet associé à f sur $]0, \pi/2[$.
4. Déterminer une application $\alpha :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]0, \pi/2[, \quad \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

puis en déduire la courbure de f sur l'intervalle $]0, \pi/2[$.

5. Retrouver le résultat précédent en utilisant un calcul direct.
6. Déterminer la développée de la courbe et l'interpréter géométriquement.
7. Déterminer l'orthoptique de l'astroïde, i.e. l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de l'astroïde orthogonales entre elles.

Exercice 31 - Ellipse : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que la développée de l'ellipse paramétrée par $f : t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$ est une dilatation de l'astroïde.

Exercice 32 - Cardioïde : On considère la courbe paramétrée par

$$f : t \mapsto (2 \cos(t) + \cos(2t), 2 \sin(t) + \sin(2t)).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Calculer la longueur de la courbe.
3. Déterminer la développée de la courbe et l'interpréter géométriquement.

Exercice 33 - Cycloïde : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= t - \sin(t) \\ y(t) &= 1 - \cos(t). \end{cases}$$

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comparer les points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$.
2. Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de la courbe paramétrée?
3. Tracer la courbe paramétrée par f .
4. Calculer la longueur d'une arche de la courbe paramétrée par f .
5. Montrer que la développée d'une arche de la cycloïde est le translaté d'une arche de la cycloïde.

Exercice 34 - Cycloïde variante : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in]0, 4\pi[, \quad \begin{cases} x(t) &= t + \sin(t) - 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ y(t) &= 3 + \cos(t) - 4 \cos\left(\frac{t}{2}\right). \end{cases}$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Calculer la longueur de la courbe du point $M(0)$ au point $M(4\pi)$.
3. Déterminer la développée de la courbe.

Exercice 35 - Deltoïde : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= 2 \cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) &= 2 \sin(t) - \sin(2t). \end{cases}$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Montrer que la développée de la courbe peut être obtenue par composition d'une homothétie et d'une rotation.

Exercice 36 - Parabole : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la parabole $\mathcal{C}$ paramétrée par

$$f: t \mapsto \left(\frac{t^2}{2p}, t \right).$$

1. Déterminer la courbure de la courbe paramétrée par f .
2. Déterminer la développée de la courbe paramétrée par f .
3. Calculer l'abscisse curviligne d'origine 0 de f .
4. Soit N le point d'intersection de la normale à la courbe en un point $M \in \mathcal{C}$ avec la droite d'équation $2x + p = 0$. Montrer que $2MN = -\frac{1}{\gamma}$.

Exercice 37 : On considère la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= (1 + \cos^2(t)) \sin(t) \\ y(t) &= \sin^2(t) \cos(t). \end{cases}$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Déterminer la développée de la courbe.

Exercice 38 - Tractrice : On considère la courbe paramétrée par

$$f: t \mapsto \left(t - \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}, \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $R(t)$ le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en $M(t)$. Montrer que $M(t)R(t) = 1$.
3. Déterminer la développée de la courbe.

Exercice 39 - Tractrice : On considère la courbe paramétrée par

$$f: t \mapsto \left(\cos(t) + \ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right), \sin(t) \right).$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f .
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $R(t)$ le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en $M(t)$. Montrer que $M(t)R(t) = 1$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la développée de la courbe.
4. Déterminer une équation cartésienne de la développée de la courbe.

Exercice 40 : On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $\ln$. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ où la valeur absolue du rayon de courbure est minimale.

Exercice 41 : On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$. Déterminer la courbure de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 42 : On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ définie sur l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$.

1. Calculer une abscisse curviligne de la courbe $\mathcal{C}$.
2. Déterminer la développée de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 43 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ qui n'est pas un segment. Montrer que

$$L(f) > \|f(1) - f(0)\|.$$

Exercice 44 : Déterminer les courbes paramétrées régulières de classe $\mathcal{C}^2$ dont la courbure est nulle.

Partie III Enveloppe d'une famille de droites

Exercice 45 : Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)$ avec $t \in]0, 2\pi[$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite passant par les points

$$A(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{et} \quad B(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

Exercice 46 : On considère la courbe d'équation $xy = 1$. On note A_t et B_t les points de la courbe d'abscisse respective t et $2t$ pour $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(A_t B_t)_{t \in \mathbb{R}^*}$.

Exercice 47 : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère les points $P_t(\cos(t), 0)$ et $Q_t(0, \sin(t))$. Déterminer l'enveloppe de la famille des médiatrices de $[P_t Q_t]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 48 : On note $\mathcal{C}$ le cercle unité et A le point de coordonnées $(1, 0)$. Déterminer l'enveloppe de la famille des droites symétriques à (AM) par rapport à la droite (OM) lorsque M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A\}$.

Exercice 49 : Soit F un point du plan qui n'est pas sur le cercle trigonométrique.

1. Déterminer l'enveloppe $\mathcal{E}$ de la famille des médiatrices du segment $[MF]$ lorsque M décrit le cercle trigonométrique.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{E}$ est bornée si et seulement si le point F est à l'intérieur du disque trigonométrique.

Exercice 50 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on considère la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{\lambda}{t} + \frac{1}{t+1}, \frac{\lambda}{t-1} + \frac{1}{t} \right).$$

1. Montrer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la courbe $\mathcal{C}_\lambda$ admet une asymptote $\mathcal{D}_\lambda$ dont on précisera une équation cartésienne lorsque $t \rightarrow 0$.
2. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^*}$.

Exercice 51 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par la fonction vectorielle

$$f : t \mapsto \left(\frac{2}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} \right).$$

1. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(M(t)M(1/t))$ où $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{\pm 1\}$.
2. Montrer que cette enveloppe est contenue dans une conique.

Exercice 52 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $2tx - y = t^2$.

Exercice 53 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $(1 - t^2)x + 2ty = 1 + t^2$.

Exercice 54 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $(t - 2)x + (3t - 2t^2)y + t^3 = 0$.

Exercice 55 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $(t - 1)x + (t - 2t^2)y + t^2 = 0$.

Exercice 56 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $(t^3 + 3t)x - 2y = t^3$.

Exercice 57 : Déterminer l'enveloppe de la famille $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ où $\mathcal{D}_t$ est la droite admettant pour équation cartésienne $tx - y + t^3 = 0$.

Partie IV Courbes planes implicites

Exercice 58 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 0$.

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les points singuliers de $\mathcal{C}$.

Exercice 59 - Ellipse : Soient $a, b > 0$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 60 - Hyperbole : Soient $a, b > 0$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 61 - Folium de Descartes : Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane d'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 62 - Lemniscate : Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane d'équation

$$(x^2 + y^2)^2 + y^2 - x^2 = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 63 : Tracer quelques lignes de niveau et placer quelques gradients des applications suivantes.

$$(i) \quad g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ii) \quad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto yx^{-1}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x.$$

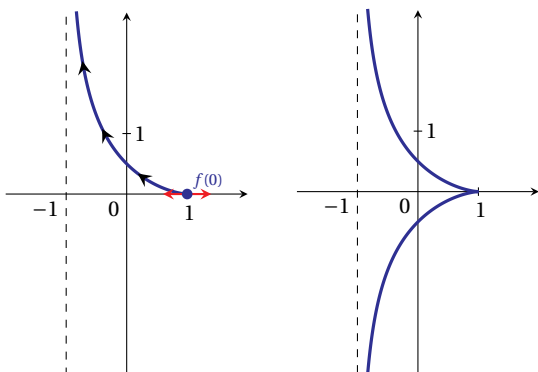
— Solutions partielles —

Exercice 2 : On trouve les tangentes en $f(\sqrt{2})$ et en $f(-\sqrt{2})$.

Exercice 3 :

1. Le point double a pour coordonnées $(0, 0) = f(\pm\sqrt{3})$.
2. L'angle entre les tangentes admet une mesure de $\frac{\pi}{3}$.

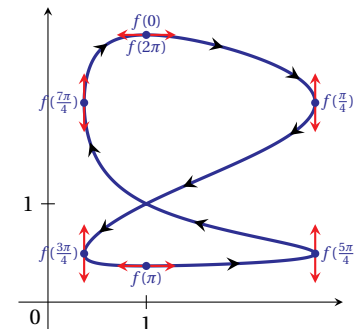
Exercice 9 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



Exercice 10 : Le point double a pour coordonnées $(1, 1) = f\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

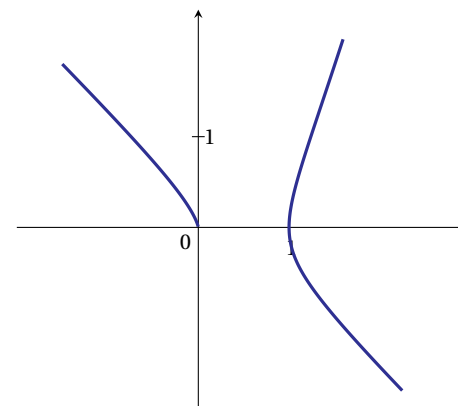
Exercice 11 :

1. Après une étude, on obtient le tracé suivant.

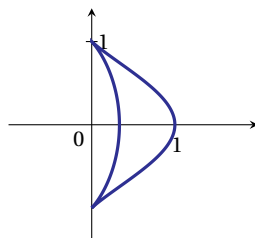


2. Le point double est en $(1, 1) = f(\pi/2) = f(-\pi/2)$.
3. La tangente en $f(\pi/2) = (1, 1)$ admet pour équation $2y = x + 1$ et celle au point $f(-\pi/2) = (1, 1)$ a pour équation $2y = -x + 3$.

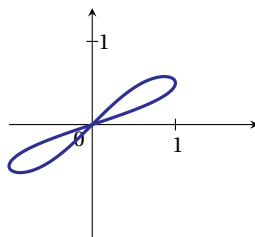
Exercice 12 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



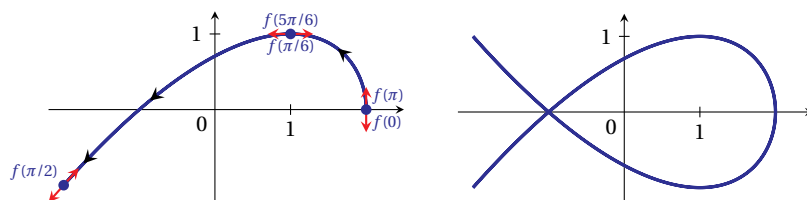
Exercice 13 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



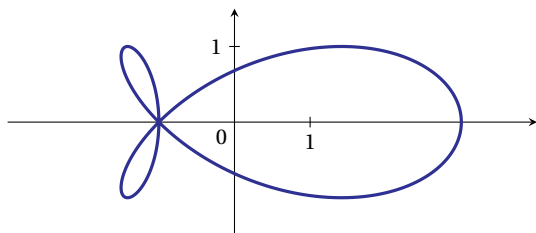
Exercice 14 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



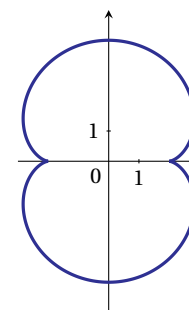
Exercice 15 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



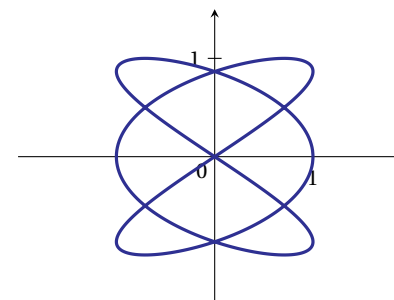
Exercice 16 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



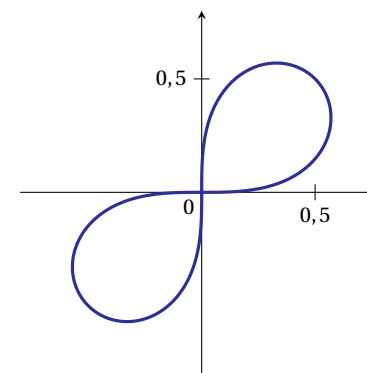
Exercice 17 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



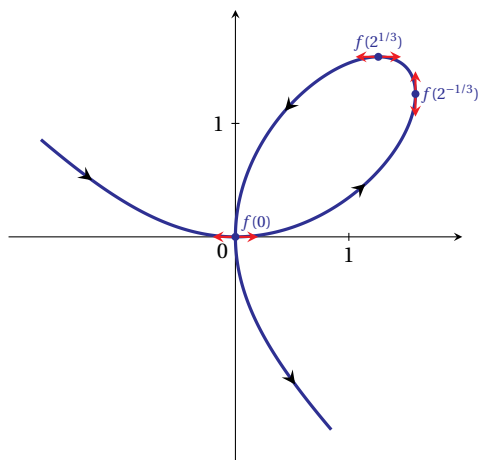
Exercice 18 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



Exercice 19 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



Exercice 20 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



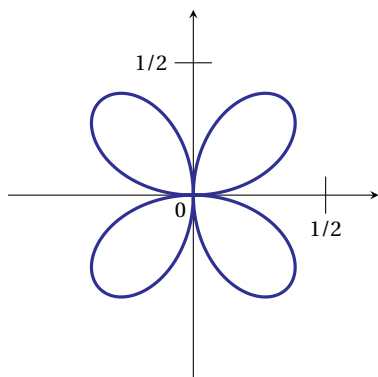
Exercice 24 : En utilisant $u = (1 + e^{2t})^{1/2}$, on obtient que la longueur est

$$L = \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{1 + e^2} - 1) - \ln(\sqrt{2} - 1) - 1.$$

Exercice 25 : La longueur de la courbe est

$$L = \int_0^1 \|f'(t)\| dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{1/2} dt = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

Exercice 27 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.

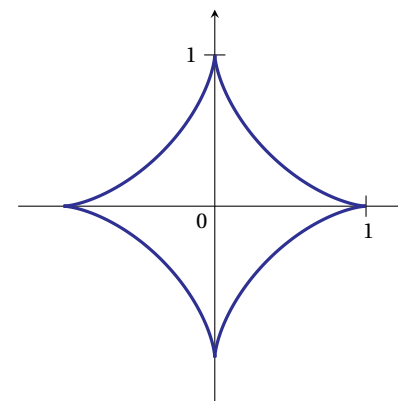


Exercice 28 :

1. L'abscisse curviligne d'origine 0 est $\varphi : t \mapsto \text{sh}(t)$.
2. La courbure est $\gamma : t \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2(t)}$.
3. La développée est la courbe paramétrée par $C : t \mapsto (t - \text{ch}(t) \text{sh}(t), 2 \text{ch}(t))$.

Exercice 30 :

1. Après une étude, on obtient le tracé suivant.

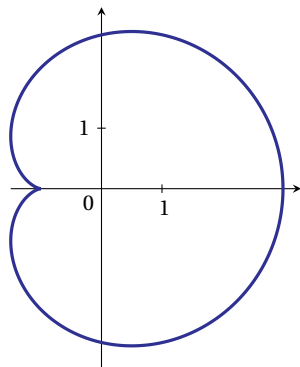


2. La longueur de la courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 4 \int_0^{\pi/2} 3 \cos(t) \sin(t) dt = 6.$$

Exercice 32 :

1. Après une étude, on obtient le tracé suivant.

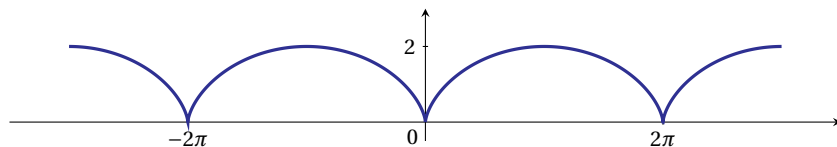


2. La longueur de la courbe est

$$L = 2 \int_0^\pi \|f'(t)\| dt = 8 \int_0^\pi \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8 \left[2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^\pi = 16.$$

Exercice 33 :

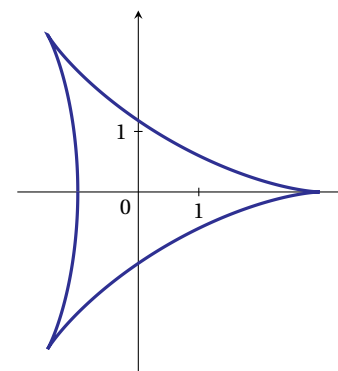
1. Après une étude, on obtient le tracé suivant.



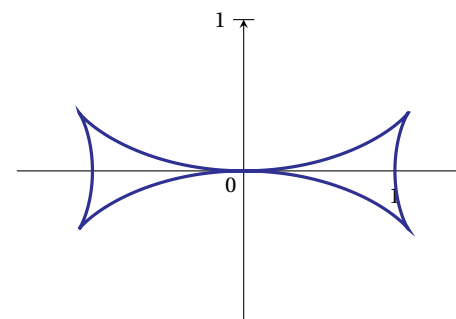
2. La longueur de la courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \left[-2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8.$$

Exercice 35 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



Exercice 37 : Après une étude, on obtient le tracé suivant.



Exercice 38 : La développée est la chaînette d'équation cartésienne $y = \text{ch}(x)$.

Exercice 39 : La développée de la tractrice est la chaînette paramétrée par

$$t \mapsto \left(\ln \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right), \frac{1}{\sin(t)} \right).$$

Cette dernière admet pour équation cartésienne $y = \text{ch}(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 40 : On obtient que $\gamma(t) = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}$, puis en déduit que la valeur absolue du rayon de courbure est minimale en $t = 1/\sqrt{2}$.

Exercice 41 : On a $\gamma(t) = \frac{6t}{(1+9t^4)^{3/2}}$.

Exercice 42 :

1. En posant $u = \sin(\theta)$, on trouve qu'une abscisse curviligne est

$$\varphi : t \mapsto \int_0^t \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right).$$

2. La courbure est $\gamma : t \mapsto -\cos(t)$. On en déduit que la développée est la courbe paramétrée par $C : t \mapsto (t - \tan(t), \ln(\cos(t)) - 1)$.

Exercice 43 : Il suffit de remarquer que l'on a la relation

$$\|f(1) - f(0)\|^2 = \int_0^1 (f(1) - f(0) | f'(t)) dt$$

et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 45 : On obtient une cardioïde.

Exercice 47 : L'enveloppe de la famille est l'astroïde paramétré par

$$f : t \mapsto \left(\frac{\cos(t) + \sin(2t) \sin(t)}{2}, \frac{\sin(t) + \sin(2t) \cos(t)}{2} \right)$$

Exercice 49 : Si on note (a, b) les coordonnées du point F , on a

$$x(t) = \frac{(a^2 + b^2 - 1) \cos(t)}{2(a \cos(t) + b \sin(t) - 1)} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{(a^2 + b^2 - 1) \sin(t)}{2(a \cos(t) + b \sin(t) - 1)}.$$

Exercice 50 :

1. Une équation cartésienne de l'asymptote est $x - \lambda y = 1 + \lambda^2$.
2. L'enveloppe de la famille est la parabole d'équation $4x + y^2 = 4$.

Exercice 52 : Considérer le point $A(t) = (t, t^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 53 : Considérer le point $A(t) = (1, 2t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 54 : Considérer le point $A(t) = (3t^2, 2t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 55 : Considérer le point $A(t) = (t, 1)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 56 : Considérer le point $A(t) = (1, 3t/2)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 57 : Considérer le point $A(t) = (0, t^3)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 59 :

1. Tous les points de la courbe sont réguliers.
2. L'équation de la tangente en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ est

$$\frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y - 1 = 0.$$

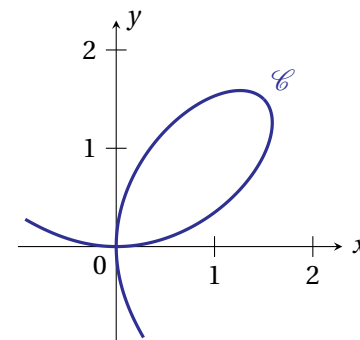
Exercice 60 :

1. Tous les points de la courbe sont réguliers.
2. L'équation de la tangente en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ est

$$\frac{x_0}{a^2} x - \frac{y_0}{b^2} y - 1 = 0.$$

Exercice 61 :

1. La courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point singulier qui est $(0, 0)$.

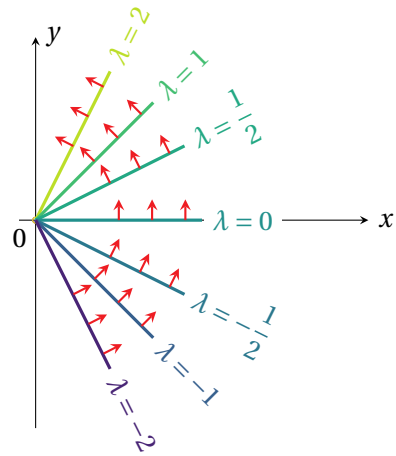


2. L'équation de la tangente en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$ est

$$(x_0^2 - y_0)x + (y_0^2 - x_0)y - x_0 y_0 = 0.$$

Exercice 63 :

(i) On obtient le tracé ci-dessous.



(ii) On obtient le tracé ci-dessous.

