Convexité des fonctions

Partie I Parties convexes

Exercice 1 : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On considère la partie E de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soient C_1 et C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E. On considère la partie C de E définie par

$$C = \{x + y \in E \mid (x, y) \in C_1 \times C_2\}.$$

Montrer que C est une partie convexe de E.

Exercice 3 : Soient C_1 et C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E. Pour tout $t \in [0,1]$, on considère la partie C_t de E définie par

$$C_t = \{tx + (1-t)y \in E \mid (x, y) \in C_1 \times C_2\}.$$

1. Montrer que C_t est une partie convexe de E pour tout $t \in [0,1]$.
2. Montrer que la réunion des C_t pour $t \in [0,1]$ est une partie convexe de E.

Exercice 4 : Montrer que l'intersection de deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E est une partie convexe.

Exercice 5 : Montrer que l'adhérence et l'intérieur d'une partie convexe d'un espace vectoriel normé E sont des parties convexes.

Exercice 6 : Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E. Montrer que X est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X^n, \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0,1]^n \quad \text{avec} \quad t_1 + \dots + t_n = 1,$$

on a $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n \in X$.

Exercice 7 - Enveloppe convexe : Soit X une partie d'un espace vectoriel réel E. On note $\mathscr{E}(X)$ l'ensemble des parties convexes de E contenant X et on définit

$$\mathrm{Conv}(X) = \bigcap_{C \in \mathscr{E}(X)} C.$$

1. Montrer que $\mathrm{Conv}(X)$ est la plus petite partie convexe de E contenant X.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in \mathrm{Conv}(X)$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\exists (x_1, \dots, x_p, t_1, \dots, t_p) \in X^p \times [0,1]^p, \quad \begin{cases} 1 &= t_1 + \dots + t_p \\ x &= t_1 x_1 + \dots + t_p x_p. \end{cases}$$

3. Montrer que si E est de dimension finie, alors on peut prendre $p = \dim(E) + 1$ dans la question précédente.
4. Montrer que si X est une partie compacte d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, alors $\mathrm{Conv}(X)$ est une partie compacte de E.

Exercice 8 : Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Montrer que la partie F est convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad \frac{x+y}{2} \in F.$$

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que si C est une partie convexe et dense dans E, alors $C = E$.

Partie II Fonctions convexes

Exercice 10 : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tels que la fonction $f : t \mapsto P(t)$ est convexe.

Exercice 11 : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que la fonction $x \mapsto xf(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f(1/x)$ l'est.

Exercice 12 : Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\Gamma = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$$

est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur un intervalle I non réduit à un point. Pour tout $a \in I$, on considère la fonction $\tau_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

1. Montrer que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout élément $a \in I$, la fonction τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
2. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point de l'intérieur de I et que $f'_g \leqslant f'_d$ sur l'intérieur de I.
3. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est continue sur l'intérieur de I.

Exercice 14 : Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction concave, alors la fonction $x \mapsto f(x)/x$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Exercice 15 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 16 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement décroissante. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Exercice 17 : Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction concave, alors on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad f(x + y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Exercice 18 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Montrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si f^a est convexe pour tout $a > 0$.

Exercice 19 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 20 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors f est positive.
2. Montrer que si $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote T en $+\infty$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T.

Exercice 22 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe admettant un minimum local en un point $a \in I$. Montrer que f admet un minimum global en a.

Exercice 23 : Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est minorée.

Exercice 24 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $x \mapsto f(x)/x$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$.
2. Montrer que si $\ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ admet une limite $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 25 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de $y'' + e^x y = 0$. Montrer que la fonction f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $y'' = e^x y$.

1. Montrer que f^2 est convexe.
2. Montrer que si f s'annule deux fois sur $\mathbb{R}$, alors f est la fonction nulle.

Exercice 27 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On considère les fonctions $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

où $M = \sup\{|f''(x)| \in \mathbb{R}_+ \mid x \in [a,b]\}$.

1. Montrer que g est convexe et que h est concave.
2. En déduire l'inégalité

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Exercice 28 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Montrer que la fonction f est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 29 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \max(f(x), g(x)) \geqslant 0.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que la fonction $(1-\lambda)f + \lambda g$ est positive.

Partie III Inégalité de convexité

Exercice 30 : Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in [0,\pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

Exercice 31 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

Exercice 32 : Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Exercice 33 : Soient $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $x_{n+1} = x_1$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} \geqslant n.$$

Exercice 34 : Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in]1,+\infty[^n$, on a

$$\sqrt[n]{\ln(x_1)\cdots\ln(x_n)} \leqslant \ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right).$$

Exercice 35 : Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $1 \leqslant p < q$. Pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{1/q}.$$

Exercice 36 : Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n$, on a

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 37 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad x^n - 1 \geqslant n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Exercice 38 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in [1,+\infty[^n$, on a

$$\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k}.$$

Exercice 39 : On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n$, on a
$$1+\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)^{1/n}.$$
3. Montrer que pour tout $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in]0,+\infty[^{2n}$, on a
$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^{1/n}.$$

Exercice 40 : On définit $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Γ est convexe.
2. Montrer que $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

Exercice 41 - Inégalité de Hermite-Hadamard : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 42 - Inégalité de Jensen : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I.

1. Montrer que si $g : [a,b] \to I$ est une fonction continue, alors
$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(g(t))\,\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que si $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction
$$x \longmapsto \left(\int_0^1 |\varphi(t)|^x\right)^{1/x}$$
est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 43 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe où I est un intervalle ouvert. On considère $a \in I$ et on définit la fonction $\tau_a : I\setminus\{a\} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in I\setminus\{a\}, \quad \tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

1. Montrer que la fonction τ_a est croissante sur $I\setminus\{a\}$.
2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant f(a)+\lambda(x-a)$.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I. Montrer que si X et $f(X)$ admettent une espérance, alors on a $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.

Solutions partielles

Exercice 8 : Pour $(x, y) \in F^2$, on vérifie que $S = \{t \in [0,1] \mid tx + (1-t)y \in F\}$ est une partie fermée et dense dans $[0,1]$, ce qui permet de conclure.

Exercice 9 : Procéder par récurrence sur la dimension de E. Si H est un hyperplan de E, montrer que $H \cap C$ est dense dans H.

Exercice 10 : On obtient les polynômes de degré 1.

Exercice 14 : Utiliser l'inégalité des cordes.

Exercice 16 : La fonction f^{-1} est concave.

Exercice 18 : En écrivant l'inégalité de convexité pour f^a, on constate que l'inégalité est une égalité lorsque $a = 0$. On en déduit que la dérivée par rapport à a du premier membre est inférieur à la dérivée du second membre en $a = 0$.

Exercice 23 : Utiliser l'inégalité des pentes pour minorer f.

Exercice 24 : Utiliser que la fonction $x \mapsto (f(x) - f(0))/x$ est croissante.

Exercice 25 : Si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut supposer que f est positive. On en déduit que f est positive et concave sur $\mathbb{R}$, donc elle est constante. On en déduit que f est nulle, ce qui est absurde.

Exercice 26 : Si f s'annule en a et b avec $a < b$, alors f^2 est nulle sur $[a,b]$ par convexité. On en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$ par unité de la solution d'un problème de Cauchy.

Exercice 28 : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que l'inégalité de convexité sur le segment $[x, y]$ et vérifiée pour les $t = k/2^n$ pour $k \in [\![0, 2^n]\!]$. On conclut par densité de ces points dans $[0,1]$ et la continuité de f.

Exercice 29 : On pourra utiliser que f et g s'annulent au plus deux fois, puis dans chacun des cas, déterminer les conditions pour qu'un réel λ convienne.

Exercice 31 : La fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $[0, +\infty[$, donc elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 33 : Utilisé la concavité du logarithme.

Exercice 34 : Montrer que $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave.

Exercice 35 : Appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction $t \mapsto t^{q/p}$.

Exercice 36 : Utiliser la convexité de $x \mapsto 1/x$.

Exercice 37 : Simplifier par $x - 1$ et utiliser la convexité de $y \mapsto x^y$.

Exercice 38 : Utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto (1 + e^t)^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 40 : Pour la seconde question utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que la dérivée seconde est positive.

Exercice 41 : Il suffit d'utiliser que la courbe représentative de la fonction f est en-dessous de la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et au-dessus de la tangente au point d'abscisse $(a+b)/2$.

Exercice 42 : Pour la première question, utiliser une somme de Riemann.

Exercice 43 : Pour la dernière question, prendre $(a, x) = (\mathrm{E}(X), X)$ dans l'inégalité précédente, puis prendre l'espérance de l'inégalité.