— Coniques —

Dans tous les exercices, on considère un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$.

Partie I Les coniques

Exercice 1 : Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan et F un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}$.

1. Montrer que par tout point $M \in \mathscr{P} \setminus (\mathscr{D} \cup \{F\})$ passe une unique conique $\mathscr{C}$ de directrice $\mathscr{D}$ et de foyer F.
2. Préciser la nature de $\mathscr{C}$ en fonction de la position de M.

Exercice 2 : Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan et M un point n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. Déterminer l'ensemble des foyers des paraboles de directrice $\mathscr{D}$ passant par M.

Exercice 3 : Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole du plan $\mathscr{P}$. On considère un point M de $\mathscr{H}$ et on note H et H' ses projetés orthogonaux respectifs sur les asymptotes de $\mathscr{H}$. Montrer que le produit $MH \times MH'$ ne dépend pas du choix du point M.

Exercice 4 : Soient $\mathscr{C}$ une ellipse de centre O dans le plan et $A, B \in \mathscr{C}$ deux points non alignés avec O.

1. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}$ en A et en B se coupent en un point M.
2. Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que M, O et I sont alignés.

Exercice 5 : Soient $\mathscr{C}$ une ellipse dans le plan et $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses sommets.

1. Montrer que pour tout $M \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{S}$, la normale à $\mathscr{C}$ en M coupe le grand axe en un point A_M et le petit axe en un point B_M.
2. Montrer que le milieu I_M du segment $[A_M B_M]$ décrit une ellipse privée de ses sommets lorsque M parcourt $\mathscr{C} \setminus \mathscr{S}$.

Exercice 6 : Soient $\mathscr{C}$ une ellipse de centre O dans le plan et $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses sommets. Pour tout point $M \in \mathscr{C}$, on note S_M le symétrique de M par rapport au grand axe de $\mathscr{C}$.

1. Donner une représentation paramétrique de l'ellipse dans un repère orthonormé adéquat.
2. Donner une équation de la normale $\mathscr{N}_M$ en M à l'ellipse $\mathscr{C}$.
3. Montrer que le point d'intersection I_M entre les droites $\mathscr{N}_M$ et (OS_M) décrit une ellipse privée de ses sommets lorsque M parcourt $\mathscr{C} \setminus \mathscr{S}$.

Exercice 7 : Soient $\mathscr{C}$ une ellipse de centre O dans le plan et $A \in \mathscr{C}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux points distincts $M, N \in \mathscr{C}$ tels que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et en N soient parallèles à la droite (AO).
2. Montrer que l'aire du triangle AMN ne dépend pas du point A.

Exercice 8 : Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

Exercice 9 - Hyperbole équilatère : Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'excentricité d'une hyperbole pour que ses deux asymptotes soient orthogonales.

Exercice 10 - Propriété optique de la parabole : Soit $\mathscr{C}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.

1. Montrer que pour tout point M de $\mathscr{C}$, la tangente à $\mathscr{C}$ en M est la médiatrice du segment $[FH]$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
2. On note H' l'image de H par la symétrie de centre M. Montrer que la droite normale à la parabole $\mathscr{C}$ au point M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH'}$.
3. Comment se réfléchit un rayon lumineux se dirigeant sur la parabole dans une direction parallèle à l'axe focal ?

Exercice 11 - Orthoptique d'une parabole : On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On considère $p \in \mathbb{R}_+^*$ et on note $\mathscr{C}$ la parabole d'équation

$$y^2 = 2px.$$

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point $M(x,y) \in \mathscr{C}$.
2. Déterminer le lieu des points du plan par lesquels passent deux tangentes à la parabole $\mathscr{C}$ qui sont perpendiculaires.

Exercice 12 : Soit $\mathscr{C}$ une parabole du plan de foyer F. Déterminer l'ensemble des projections orthogonales du foyer F sur les tangentes à $\mathscr{C}$.

Exercice 13 - Orthoptique d'une ellipse : On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On considère $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et on note $\mathscr{C}$ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{E}$ en un point $M(x,y) \in \mathscr{C}$.
2. Déterminer le lieu des points du plan par lesquels passent deux tangentes à l'ellipse $\mathscr{C}$ qui sont perpendiculaires.

Exercice 14 - Définition bifocale d'une hyperbole : Soient F_1 et F_2 deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a > F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. Montrer que si $2a < F_1F_2$, alors l'ensemble $\mathscr{C}$ est une hyperbole dont les deux foyers sont F_1 et F_2.

Exercice 15 - Définition bifocale d'une ellipse : Soient F_1 et F_2 deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a < F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. On suppose que $2a > F_1F_2$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse dont les deux foyers sont F_1 et F_2.
   (b) Montrer que si l'application $f : I \to \mathscr{P}$, notée $f : t \mapsto M(t)$, est une paramétrisation $\mathscr{C}^1$ de l'ellipse $\mathscr{C}$, alors on a

$$\forall t \in I, \quad \left\langle f'(t) \,\middle|\, \frac{\overrightarrow{F_1M(t)}}{F_1M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2M(t)}}{F_2M(t)} \right\rangle = 0.$$

   (c) Comment se réfléchit sur l'ellipse un rayon lumineux passant par F_1 ?

Exercice 16 : On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et on considère un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < a < b$. Pour tout $m \in \mathbb{R} \setminus \{a,b\}$, on note $\mathscr{C}_m$ la conique d'équation

$$\frac{x^2}{a-m} + \frac{y^2}{b-m} = 1.$$

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}_m$ en fonction de m.
2. Montrer que les foyers de $\mathscr{C}_m$ ne dépendent pas de m.
3. Montrer que si $\mathscr{C}_m \cap \mathscr{C}_t \neq \varnothing$ avec $m,t \in \mathbb{R} \setminus \{a,b\}$ distincts, alors $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{C}_t$ sont orthogonales.

Partie II Courbes algébriques planes du second degré

Exercice 17 : On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer la nature géométrique et préciser les éventuelles symétries des coniques suivantes.

(i) $x^2+y^2-3x-y+3=0$, (ii) $x^2-y^2+4x+2y+3=0$,

(iii) $2x^2-y^2+4x-4y-1=0$, (iv) $4x^2+y^2+4x-2y-6=0$,

(v) $x^2+2xy+y^2+3x-2y=0$, (vi) $x^2+2xy+y^2-6x-6y+8=0$,

(vii) $13x^2-32xy+37y^2-5=0$, $(viii)$ $x^2+8xy-5y^2-28x+14y+3=0$,

(ix) $3x^2+\sqrt{3}xy-2y^2+14y-4=0$, (x) $x^2+2xy+y^2-2\sqrt{2}x+6\sqrt{2}y=0$.

Exercice 18 : Soit $m\in\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2+y^2+2mxy=1.$$

Exercice 19 : Soit $m\in\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2+y^2-2mxy+2(my-x)=0.$$

Exercice 20 : Soit $m\in\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2+y^2+2mxy+4x=m^2.$$

Exercice 21 : Soit $m\in\mathbb{R}_+^*$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$mx^2+y^2-2x=0.$$

1. Déterminer l'ensemble décrit par le centre de $\mathscr{C}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer l'ensemble décrit par les foyers de $\mathscr{C}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 22 : Soit $m\in\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2+y^2+2mxy-2x+2y=0.$$

1. Déterminer les points communs à toutes les coniques $\mathscr{C}_m$ pour $m\in\mathbb{R}$.
2. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}_m$ en fonction de m.
3. Déterminer l'ensemble décrit par le centre de $\mathscr{C}_m$ lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 23 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation

$$2x^2+4xy-y^2-12x+16=0.$$

1. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente au point $(2,0)$ et préciser une équation de cette dernière.

Exercice 24 : Déterminer et représenter l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M d'affixe $z\in\mathbb{C}$ tels que les points d'affixes z, z^2 et z^5 sont alignés.

Exercice 25 : Soient $\mathscr{D}$ une droite du plan, A un point de $\mathscr{P}\setminus\mathscr{D}$ et $d\in\mathbb{R}_+^*$. Déterminer l'ensemble des points $M\in\mathscr{P}$ vérifiant la relation $AM+d(M,\mathscr{D})=d$

Exercice 26 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1,0)$ et $B(0,1)$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points du plan dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle OAB est égale à $1/3$.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse.
2. Montrer que l'ellipse $\mathscr{C}$ est tangente aux droites (OA) et (OB).
3. Déterminer une paramétrisation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 27 : On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 3.

1. Montrer que l'ensemble des points du plan de coordonnées (x,y) vérifiant l'équation $P(x) = P(y)$ est la réunion d'une droite et d'une conique $\mathscr{C}$.
2. Montrer que la conique $\mathscr{C}$ est bornée.

Exercice 28 : On munit le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Déterminer le lieu des centres des cercles tangents à l'axe (Oy) et coupant l'axe (Ox) en deux points M et N tels que $MN = 1$.

Exercice 29 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(1,0)$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 + x = 1$ et l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$. Pour tout nombre $m \in \mathbb{R}^*$, on note $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation $y = m(1-x)$ dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Montrer que la droite $\mathscr{D}_m$ coupe la parabole $\mathscr{P}$ en un point $M_m \neq A$ dont on précisera les coordonnées.
2. Montrer que la droite $\mathscr{D}_m$ coupe l'ellipse $\mathscr{E}$ en un point $N_m \neq A$ dont on précisera les coordonnées.
3. Déterminer une équation de la tangente en M_m à la parabole $\mathscr{P}$ et une équation de la tangente en N_m à l'ellipse $\mathscr{E}$.
4. Déterminer le lieu des points d'intersection des deux tangentes précédentes quand m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 30 : Soit $p > 0$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ et un point $A \in \mathscr{P}$.

1. Montrer qu'il existe un point Q de sorte que pour tout couple $(M,N) \in \mathscr{P}^2$ tel que la droite (AM) est orthogonale à (AN), la droite (MN) passe par Q.
2. Déterminer le lieu du point Q lorsque A décrit la parabole $\mathscr{P}$.

Solutions partielles

Exercice 7 : L'aire du triangle est égale à ab où a et b sont les rayons de l'ellipse.

Exercice 11 : L'orthoptique de la parabole est sa directrice.

Exercice 12 : L'ensemble cherché est la tangente au sommet de la parabole.

Exercice 13 : L'orthoptique de l'ellipse est le cercle de centre le point O et dont le rayon mesure $\sqrt{a^2+b^2}$.

Exercice 24 : L'ensemble $\mathscr{C}$ est la réunion de l'axe des abscisses et d'une hyperbole.

Exercice 25 : Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. On a plusieurs cas.

(i) Si $d < d(A,\mathscr{D})$, alors il n'y a pas de solution.

(ii) Si $d = d(A,\mathscr{D})$, alors l'ensemble des solutions est le segment $[AH]$.

(iii) En fixant un repère orthonormé d'origine H de sorte que $\mathscr{D}$ ait pour équation $y = 0$ et que A ait pour coordonnées $(a,0)$ avec $a > 0$, on obtient que l'ensemble des solutions est la réunion des deux arcs de paraboles

$$\mathscr{A}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2(d-a)y = d^2 - a^2 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\mathscr{A}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2(d+a)y = d^2 - a^2 \text{ et } -d \leqslant y \leqslant 0\}.$$

On peut vérifier que le foyer de $\mathscr{A}_1$ est A et que sa directrice est la droite d'équation $y = d$, tandis que le foyer de $\mathscr{A}_2$ est A et que sa directrice est la droite d'équation $y = -d$.