Calcul différentiel

Partie I Dérivées partielles

Exercice 1 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 2 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.

Exercice 4 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln|x| & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.

Exercice 5 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.

Exercice 6 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}x(x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

Partie II Différentielle d'une application

Exercice 7 : Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle.

$$(i)\ (x,y)\mapsto \mathrm{e}^{xy}(x+y),\quad (ii)\ (x,y)\mapsto (y\sin(x),\cos(y)).$$

Exercice 8 : Soit $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M\mapsto M^{-1}$.

1. Montrer que l'application φ est différentiable en $\mathrm{I}_n\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en ce point.
2. Reprendre la question précédente avec $M\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 9 : Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M\mapsto M^p$.

1. Montrer que l'application φ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer la différentielle de φ en $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 10 : Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ définie par $M\mapsto \det(M)$.

1. Montrer que l'application φ est différentiable sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer la différentielle de φ en I_n, puis en $M\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconque.
3. En déduire la différentielle de φ en $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque.

Exercice 11 : Soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ définie par

$$P\mapsto \int_0^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle.

Exercice 12 : Montrer que $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=1/z$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 13 : Soit $p\in\mathbb{N}$. On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$f(x,y)=(x+y)^p\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $p\in\mathbb{N}$ pour que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ par continuité.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $p\in\mathbb{N}$ pour que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une application différentiable.

Exercice 14 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application différentiable vérifiant

$$\forall (x,y,t)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x+t,y+t)=f(x,y)\quad (E).$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.
2. Montrer la réciproque.

Exercice 15 : Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant

$$\forall t>0,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(tx,ty)=t^a f(x,y).$$

1. Montrer que
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=af(x,y).$$
2. Démontrer la réciproque.

Exercice 16 : Soit $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ une application différentiable vérifiant

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \forall x\in\mathbb{R}^p,\quad f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

1. Montrer que $f(0)=0$.
2. Montrer que f est linéaire.

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bijective et différentiable. Montrer que si la réciproque de f est différentiable, alors $p = q$.

Exercice 18 : Soit $\varphi : E \times E \to F$ une application bilinéaire où E et F sont deux espaces vectoriels réels de dimension finie. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 19 : Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. En quels points l'application $x \mapsto \|x\|$ est-elle différentiable ?
2. Déterminer en ces points le vecteur gradient.

Exercice 20 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 21 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que f est une application affine si et seulement si l'application $x \mapsto d_x f$ est constante sur E.

Exercice 22 : Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. On fixe un point $x_0 \in E$ et on définit l'application $f : E \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}(u(x) \mid x) + (x_0 \mid x).$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Calculer le gradient de f en tout point de E.

Partie III Applications de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 23 : Déterminer si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 24 : Déterminer si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 25 : Déterminer si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln\left(x^2 + y^2\right) & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 26 : Déterminer si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 27 : Déterminer si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 28 : Déterminer si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 29 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$$

se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 30 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que f est homogène de degré 1, c'est à dire

$$\forall t > 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(tx,ty) = tf(x,y).$$

1. Montrer que les dérivées partielles de f sont constantes.
2. En déduire que f est une application linéaire.

Exercice 31 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie ci-dessous est constante.

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 32 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On définit l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_0^x f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 33 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = af(x,y).$$

Déterminer une expression de la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 34 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On définit l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_{2x}^{x^3} f(x+1,t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 35 : On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on définit l'application $\varphi_f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \varphi_f(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ_f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer que φ_f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ par continuité.
3. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que φ_f ne dépende pas de sa première variable.

Partie IV Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Exercice 36 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, mais pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Exercice 37 : Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x^2+y^2)-f(0)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ f'(0) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 38 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.
3. L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 39 : Soit $f:\mathbb{R}^2\setminus\Delta\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y)=\frac{\cos(x)-\cos(y)}{x-y}\quad\text{avec}\quad \Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=y\}.$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une application de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 40 : Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 41 : Déterminer les fonctions $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que la fonction $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\quad f(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$$

vérifie $\Delta f=0$.

Exercice 42 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On définit l'application $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad F(u,v)=f(u^2-v^2,2uv).$$

Montrer que si $\Delta f=0$, alors $\Delta F=0$.

Exercice 43 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $F:(r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Exprimer le laplacien Δf en fonction des dérivées partielles de F.

Exercice 44 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $\Delta f=0$.

1. Soit $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $F(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$. Montrer que
$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}=0.$$
2. En déduire que l'application $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie ci-dessous est constante.
$$\forall r\in\mathbb{R},\quad \varphi(r)=\int_0^{2\pi} f(r\cos(t),r\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 45 : Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation vectorielle. Montrer que f est une rotation affine.

Partie V Équations aux dérivées partielles

V.A - Équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 46 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u &= 2x + y \\ v &= 3x + y. \end{cases}$$

Exercice 47 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u &= x + y \\ v &= 2x + 3y. \end{cases}$$

Exercice 48 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 49 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 50 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = af.$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 51 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 52 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x} f(x, y)$$

en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 53 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

en utilisant $u = xy$ et $v = \dfrac{x}{y}$.

Exercice 54 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2$$

en utilisant $u = xy$ et $v = \dfrac{x}{y}$.

Exercice 55 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xy\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y$$

en utilisant $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$.

Exercice 56 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

en utilisant $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

Exercice 57 : On considère l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$.

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2-y^2}$$

en utilisant $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$.

Exercice 58 : On considère l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$.

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$$

en utilisant $u = x + y$ et $v = xy$.

Exercice 59 : On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \left(x^2+y^2\right)^{3/2}. \qquad (E)$$

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant (E) en utilisant le changement de variable $u = x$ et $v = \dfrac{y}{x}$.
2. En déduire les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant (E).

V.B - Équations aux dérivées partielles d'ordre 2

Exercice 60 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y. \end{cases}$$

Exercice 61 : On considère l'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 > y^2\}$.

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y. \end{cases}$$

Exercice 62 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u &= x \\ v &= x+y. \end{cases}$$

Exercice 63 : Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u &= x+cy \\ v &= x-cy. \end{cases}$$

Exercice 64 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

en utilisant $u = xy$ et $v = \dfrac{x}{y}$.

Exercice 65 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

en utilisant $u = xy$ et $v = \dfrac{x}{y}$.

V.C - Systèmes aux dérivées partielles

Exercice 66 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$(i) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y e^{xy} + 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{xy}, \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + 2y, \end{cases}$$

$$(iii) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy), \end{cases} \qquad (iv) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x + y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy). \end{cases}$$

Exercice 67 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$(i) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2+x}{y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2+y}{x}, \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}. \end{cases}$$

Partie VI Extremums d'une fonction

VI.A - Généralités

Exercice 68 : Étudier les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes.

$$(i)\ f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y, \qquad (ii)\ f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2,$$
$$(iii)\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y, \qquad (iv)\ f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y,$$
$$(v)\ f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3, \qquad (vi)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$
$$(vii)\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy, \qquad (viii)\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2.$$

Exercice 69 : Étudier les extremums de la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^{\ln(x)} + y^{\ln(y)}.$$

Exercice 70 : On considère la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

1. En utilisant une étude de fonction, montrer que l'équation $t - \ln(t) - t^{-1} = 0$ admet une unique solution $t \in \mathbb{R}_+^*$ que l'on déterminera.
2. Étudier les extremums locaux de la fonction f.

Exercice 71 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 y + \ln\left(1 + y^2\right).$$

Montrer que f admet un point col en $(0,0)$.

Exercice 72 : Étudier les extremums locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \big(2 + \cos(x)\big)\big(2 + \cos(y)\big).$$

Exercice 73 : On considère la fonction $f : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y).$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.
2. Déterminer la nature de chaque point critique de l'application f.

Exercice 74 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

1. Étudier les extremums locaux de la fonction f.
2. Montrer que les extremums trouvés précédemment sont globaux.

Exercice 75 : Déterminer la borne supérieure de $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}.$$

Exercice 76 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la borne inférieure de $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x + y + \frac{a}{xy}.$$

Exercice 77 : Soient U un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ convexe et différentiable. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

Exercice 78 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz.$$

1. Déterminer les extremums locaux de f et leur nature.
2. L'application f admet-elle un extremum global ?

Exercice 79 - Régression linéaire : Soient $\big((x_1,y_1),\dots,(x_p,y_p)\big) \in \big(\mathbb{R}^2\big)^p$ tel que les nombres $x_1,\dots,x_p$ ne soient pas tous égaux. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f : (a,b) \mapsto \sum_{k=1}^{p} (y_k - ax_k - b)^2$$

1. Montrer que f admet un unique point critique $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet un minimum global en $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

VI.B - Extremums d'une fonction sur un compact

Exercice 80 : Déterminer les extremums de $f : T \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

avec $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$.

Exercice 81 : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a, b, c > 0$. Déterminer les extremums de l'application $f : T \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c.$$

avec $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 1\}$.

Exercice 82 : Déterminer les extremums de $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Exercice 83 : Déterminer les extremums de $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y).$$

Exercice 84 : Déterminer les extremums de $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x - y + x^3 + y^3.$$

Exercice 85 : Déterminer les extremums de $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

Exercice 86 : Déterminer les extremums de $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 87 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y\exp(x) + x\exp(y).$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les extremums de l'application f sur $[-1, 1]^2$.

Exercice 88 : Soit ABC un triangle non aplati du plan. Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à ABC aux cotés de ce triangle.

Exercice 89 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?

Exercice 90 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quelle est l'aire maximale d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?

Solutions partielles

Exercice 2 : La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à y sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 6 : La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à y sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^*)$.

Exercice 12 : La différentielle en $a \in \mathbb{C}^*$ est $h \mapsto -h/a^2$.

Exercice 13 : L'application se prolonge par continuité si et seulement si $p \in \mathbb{N}^*$. Ce prolongement est différentiable si et seulement si $p \geqslant 2$.

Exercice 15 : Pour la réciproque, montrer que $\varphi : t \mapsto f(tx, ty) - t^a f(x, y)$ est solution de l'équation différentielle $y' = (a/t)y$.

Exercice 19 : L'application est différentiable sur la partie $E \setminus \{0\}$. Sa différentielle en un point $a \neq 0$ est $h \mapsto (a \mid h)/\|a\|$. On en déduit que le gradient en a est $a/\|a\|$.

Exercice 20 : La différentielle est nulle en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 22 : La différentielle de f en $a \in E$ est $h \mapsto (u(a) + x_0 \mid h)$. Le gradient de la fonction f en $a \in E$ est $u(a) + x_0$.

Exercice 23 : L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 24 : L'application f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$, car la seconde dérivée partielle n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 25 : L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 26 : L'application f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 27 : L'application f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 28 : L'application f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$, car la première dérivée partielle n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 30 : Dériver la relation de départ par rapport à chacune des variables.

Exercice 31 : On a $\varphi' = 0$, donc φ est constante et vaut $2\pi f(0)$.

Exercice 33 : En appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale, on a la relation $r\varphi'(r) = \alpha\varphi(r)$. On en déduit que $\varphi(r) = \lambda r^\alpha$ pour tout $r > 0$. Si on a $\alpha < 0$, on en déduit $\lambda = 0$. Si $\alpha \geqslant 0$, on ne peut rien dire en plus.

Exercice 34 : On remarque $F(x) = \varphi(x, x^3) - \varphi(x, 2x)$ où

$$\varphi(x, u) = \int_0^u f(x+1, t)\,dt = \int_0^1 u f(x+1, tu)\,dt.$$

Il suffit d'utiliser la règle de la chaine pour conclure.

Exercice 41 : On a $\Delta f = 0$ si et seulement si φ vérifie $r\varphi''(r) + \varphi'(r) = 0$. On en déduit que $\varphi(r) = C\ln(r) + D$.

Exercice 42 : On a $\Delta F = 4(u^2 + v^2)\Delta f$.

Exercice 43 : On trouve $\Delta f = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$.

Exercice 44 : On a $r(r\varphi'(r))' = 0$, donc $\varphi(r) = C\ln(|r|) + D$ pour tout $r \in \mathbb{R}^*$. Par continuité de φ sur $\mathbb{R}$, on conclut que φ est constante.

Exercice 45 : Pour tout $(x, y)^2$, on peut écrire par hypothèse que

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y) \\ s(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$$

où $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont de classes $\mathscr{C}^1$ et vérifient $c^2 + s^2 = 1$. En dérivant cette relation, on obtient que $(\partial_x c, \partial_x s)$ et $(\partial_y c, \partial_y s)$ sont colinéaires. D'autre part, en utilisant le théorème de Schwarz, on montre que ces deux vecteurs sont aussi orthogonaux, donc ils sont nuls, ce qui permet de conclure.

Exercice 46 : On a $f(x,y)=h(3x+y)$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 47 : On a $f(x,y)=h(2x+3y)\exp(x+y)$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 48 : On a $f(x,y)=h\left(\frac{y}{x}\right)$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 49 : On a $f(x,y)=h\left(x^2+y^2\right)\exp\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)\right)$ où $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 50 : On a $f(x,y)=h\left(\frac{y}{x}\right)\left(x^2+y^2\right)^{a/2}$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 51 : On a $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+h\left(\frac{y}{x}\right)$ où la fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 52 : On a $f(x,y)=xh\left(x^2+y^2\right)$ où $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 53 : On a $f(x,y)=h(xy)$ où $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 54 : On a $f(x,y)=\ln(xy)+h\left(\frac{x}{y}\right)$ où $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 55 : On a $f(x,y)=\frac{y\ln(x)}{x}+h\left(\frac{y}{x}\right)$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 56 : On a $f(x,y)=h\left(\sqrt{\frac{2x}{1+y^2}}\right)$ où $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 57 : On a $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+h\left(\frac{y}{x}\right)$ où $h:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 58 : On a $f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{2}+h(xy)$ où $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 60 : En notant $F:(u,v)\mapsto f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$, l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0.$$

On en déduit que $f(x,y)=h(x+y)+k(x-y)$ où $h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont $\mathscr{C}^2$.

Exercice 61 : En notant $F:(u,v)\mapsto f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)$, l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=\frac{1}{\sqrt{uv}}.$$

On en déduit que $f(x,y)=h(x+y)+k(x-y)+\sqrt{x^2-y^2}$ où $h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont $\mathscr{C}^2$.

Exercice 62 : En notant $F:(u,v)\mapsto f(u,v-u)$, l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}=0.$$

On en déduit que $f(x,y)=xh(x+y)+k(x+y)$ où $h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont $\mathscr{C}^2$.

Exercice 63 : En notant $F:(u,v)\mapsto f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2c}\right)$, l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0.$$

On en déduit que $f(x,y)=h(x+cy)+k(x-cy)$ où $h,k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont $\mathscr{C}^2$.

Exercice 64 : En notant $F:(u,v)\mapsto f\left(\sqrt{uv},\sqrt{u/v}\right)$, l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$2u\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}=0.$$

On en déduit que $f(x,y)=h\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy}+k(xy)$ où $h,k:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ sont $\mathscr{C}^2$.

Exercice 65 : En notant $F:(u,v)\mapsto f\left(\sqrt{uv},\sqrt{u/v}\right)$, l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$2u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial F}{\partial u}=0.$$

On en déduit que $f(x,y)=h\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy}+k\left(\frac{x}{y}\right)$ où $h,k:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ sont $\mathscr{C}^2$.

Exercice 66 :

(i) Les solutions sont $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+3x+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

(ii) Les solutions sont $f(x,y)=\mathrm{e}^{x}y+y^2+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

(iii) Il n'y a pas de solution.

(iv) Les solutions sont $f(x,y)=\mathrm{e}^{x}+\sin(xy)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 67 :

(i) Il n'y a pas de solution.

(ii) Les solutions sont $f(x,y)=(xy)/(x+y)+C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

Exercice 69 : La fonction admet un unique point critique en $(1,1)$ où se trouve un minimum global.

Exercice 70 : La fonction admet un unique point critique en (e,e) qui est un point selle.

Exercice 72 : La fonction admet un unique point critique en $(1,1)$ où se trouve un minimum global.

Exercice 73 : Les points critiques de l'application f sont

$$p_k=(0,2k\pi),\quad q_k=(0,(2k+1)\pi),\quad r_k^{\pm}=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\pi+2k\pi\right)$$

où f admet respectivement un minimum global, un point selle et un maximum global.

Exercice 74 :

1. La fonction f admet un maximum local en $(1/2,1/2)$ et un minimum local en $(-1/2,-1/2)$.
2. Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{\|v\|\to+\infty}f(v)=0$.

Exercice 75 : Le maximum de $y\mapsto f(x,y)$ se trouve en $\sqrt{x}$. En étudiant la fonction $x\mapsto f(x,\sqrt{x})$, on a que la borne supérieure vaut $1/8$ et est atteinte en $(1,1)$.

Exercice 76 : Le minimum de $y\mapsto f(x,y)$ se trouve en $\sqrt{a/x}$. En étudiant la fonction $x\mapsto f(x,\sqrt{a/x})$, on en déduit que f admet un minimum absolu en $(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$.

Exercice 80 : Le maximum de f est $2/17$ et est atteint en $(1/3,1/3)$. Le minimum de f est 0 et est atteint sur les points du bord de T.

Exercice 81 : Le maximum de f est

$$f\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c}\right)=\frac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

Le minimum de f est 0 et est atteint sur les points du bord de T.

Exercice 82 : Le maximum de f est $3\sqrt{3}/8$ et est atteint en $(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$. Le minimum de f est 0 et est atteint en $(0,0)$.

Exercice 83 : Le maximum de f est $3\sqrt{3}/8$ et est atteint en $(\pi/3,\pi/3)$. Le minimum de f est 0 et est atteint sur

$$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\{0\}\cup\{0\}\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Exercice 84 : Le maximum de f est 2 et est atteint en $(1,0)$ et $(1,1)$. Son minimum est $-2/(3\sqrt{3})$ et est atteint en $(0,1/\sqrt{3})$.

Exercice 85 : Le maximum de f est 1 et est atteint sur

$$\{(t,t^2-1)\in\mathbb{R}^2\mid -1\leqslant t\leqslant 1\}\cup\{(0,1)\}.$$

Le minimum de f est 0 et est atteint en $(0,0)$.

Exercice 86 : Le maximum de f est 10 et est atteint en

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right),\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),\quad \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right),\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),$$
$$\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right),\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)\quad \text{et}\quad \left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right),\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Le minimum de f est -8 et est atteint en

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad \text{et}\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 87 :

1. En remarquant que la fonction $t\mapsto \frac{e^t}{t}+e^{1/t}$ ne s'annule que en -1 sur l'intervalle $]-\infty,0[$, on en déduit que la fonction f admet un unique point critique en $(-1,-1)$.
2. Avec un développement limité de $t\mapsto f(-1+at,-1+t)$, on constate que f n'admet pas d'extremum local en $(-1,-1)$.
3. Le minimum de f sur $[-1,1]^2$ est atteint en $(-1,1)$ et en $(1,-1)$, tandis que le maximum de f sur $[-1,1]^2$ est atteint en $(1,1)$.

Exercice 88 : Si M est un point intérieur à ABC, l'expression de la fonction est

$$d(M,(BC))\times d(M,(AC))\times d(M,(AB)) = \frac{8}{BC\times AC\times AB}\left(\mathscr{A}_{ABC}-\mathscr{A}_{MBC}-\mathscr{A}_{MAB}\right).$$

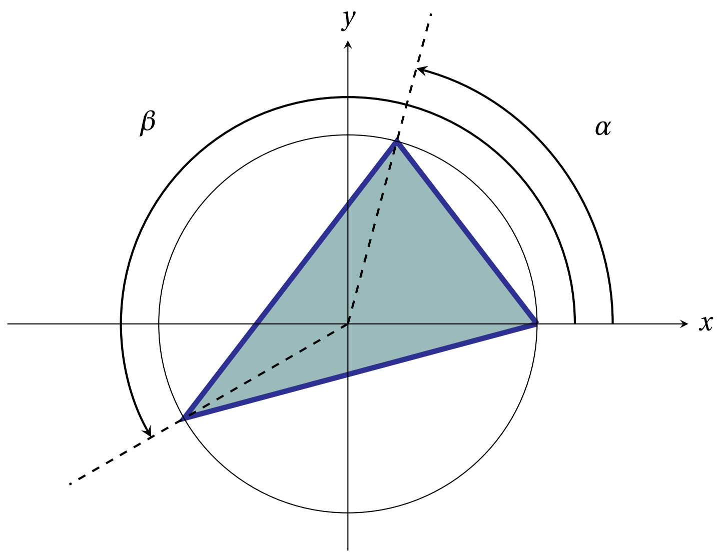
Il suffit donc de déterminer la maximum de la fonction $f: T\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(u,v) = uv(\mathscr{A}_{ABC}-u-v)\quad \text{avec}\quad T=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u\geqslant 0,\ v\geqslant 0,\ u+v\leqslant \mathscr{A}_{ABC}\}.$$

Le maximum de cette fonction est atteint en $(\mathscr{A}_{ABC}/3,\mathscr{A}_{ABC}/3)$ et il vaut

$$f\left(\frac{\mathscr{A}_{ABC}}{3},\frac{\mathscr{A}_{ABC}}{3}\right)=\frac{\mathscr{A}_{ABC}^3}{27}.$$

Exercice 89 : On peut supposer qu'un des sommets du triangle est $(1,0)$. Un triangle sur le cercle $\mathscr{C}$ peut se représenter par



On introduit donc l'ensemble fermé borné

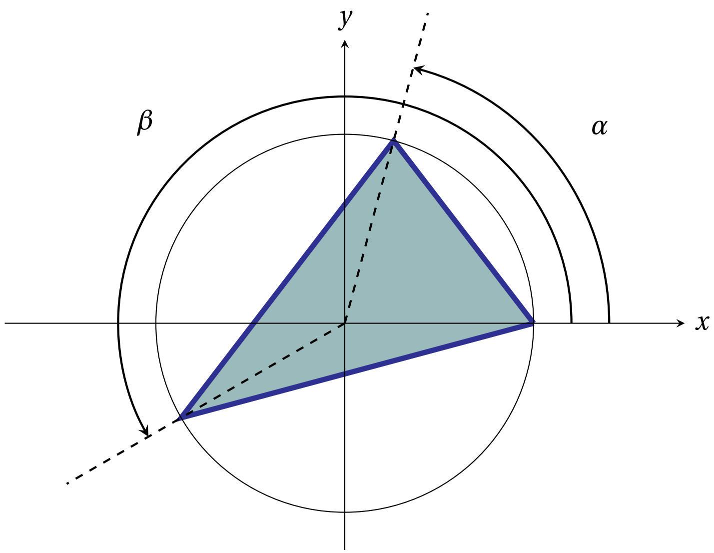
$$T=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 2\pi\}.$$

Le périmètre du triangle dessiné ci-dessus est donné par

$$f(\alpha,\beta)=2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

Le maximum de f est $3\sqrt{3}$ et est atteint en $(2\pi/3,4\pi/3)$. En revenant au problème de départ, on trouve que les triangles inscrits dans le cercle unité de périmètre maximal sont les triangles équilatéraux. Leur périmètre vaut $3\sqrt{3}$.

Exercice 90 : On peut supposer qu'un des sommets est $(1,0)$. Un triangle sur le cercle $\mathscr{C}$ peut se représenter par



On introduit donc l'ensemble fermé borné

$$T = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 2\pi\}.$$

L'aire du triangle dessiné ci-dessus est donné par

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha) + \sin(\beta-\alpha) - \sin(\beta)\right).$$

Le maximum de f est $3\sqrt{3}/4$ et est atteint en $(2\pi/3, 4\pi/3)$. En revenant au problème de départ, on trouve que les triangles inscrits dans le cercle unité d'aire maximale sont les triangles équilatéraux. Leur aire vaut $3\sqrt{3}/4$.