

Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Exercice 1 : Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X suivant les lois suivantes.

- (i) Loi uniforme $\mathcal{U}([1, n])$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,
- (ii) Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$,
- (iii) Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$,
- (iv) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$,
- (v) Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

Exercice 2 : Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X suivant les lois suivantes.

- (i) Loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$ avec $a < b$,
- (ii) Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$,
- (iii) Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$,
- (iv) Loi de Cauchy $\mathcal{C}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ dont la densité est

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2},$$

- (v) Loi Gamma $\Gamma(a, p)$ avec $a > 0$ et $p > 0$, dont la densité est

$$f(x) = \frac{p^a}{\Gamma(a)} e^{-px} x^{a-1} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x).$$

Exercice 3 : Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est réelle si et seulement si la loi de X est symétrique (i.e. X et $-X$ ont la même loi).

Exercice 4 : Soit φ_X la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- 1. Montrer que $\varphi_X(x) \rightarrow 0$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.
- 2. Montrer que φ_X est uniformément continue.

Exercice 5 : Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors la loi $X - Y$ est symétrique.

Exercice 6 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Donner la loi de $X_1 + \dots + X_n$ dans chacun des cas suivants.

- (i) Pour tout $k \in [1, n]$, on a $X_k \sim \mathcal{B}(n_k, p)$ avec $n_k \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.
- (ii) Pour tout $k \in [1, n]$, on a $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$ avec $\lambda_k > 0$.
- (iii) Pour tout $k \in [1, n]$, on a $X_k \sim \mathcal{E}(\lambda_k)$ avec $\lambda_k > 0$.
- (iv) Pour tout $k \in [1, n]$, on a $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ avec $\mu_k \in \mathbb{R}$ et $\sigma_k > 0$.
- (v) Pour tout $k \in [1, n]$, on a $X_k \sim \mathcal{C}(\lambda_k)$ avec $\lambda_k > 0$.
- (vi) Pour tout $k \in [1, n]$, on a $X_k \sim \Gamma(a_k, p)$ avec $a_k > 0$ et $p > 0$.

Exercice 7 : Existe-t-il deux variables aléatoires X et Y indépendantes telles que $X - Y \sim \mathcal{U}([-1, 1])$?

Exercice 8 : On considère un couple de variable aléatoire (X, Y) telle que $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et $Y \sim \exp(x)$ conditionnellement à $(X = x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

- 1. Calculer la densité du couple (X, Y) .
- 2. Calculer la fonction caractéristique φ_Y .

Exercice 9 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

1. Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_{XY}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(ty) dP_Y(y)$.
2. Calculer φ_{XY} si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 10 : Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et N une variable à valeurs entières indépendante des (X_n) . On suppose que les (X_n) et N admettent une espérance. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

1. Montrer que $\varphi_{S_N} = G_N \circ \varphi_{X_1}$ où G_N est la fonction génératrice de N .
2. En déduire que $E(S_N) = E(N) \cdot E(X_1)$.
3. Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $p \in]0, 1[$, déterminer la loi de la variable aléatoire S_N .

Exercice 11 : Soit X une variable aléatoire réelle bornée.

1. Montrer que φ_X est analytique.
2. En déduire que la loi de X est caractérisée par ses moments $(E(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 12 (Lemme de Scheffé) : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires admettant une densité $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge simplement vers la densité f d'une variable aléatoire X , alors la suite (f_n) converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ et la suite (X_n) converge en loi vers X .

Exercice 13 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires où $X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/n)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X_n .
2. En déduire que (X_n) converge en loi. Préciser la loi de la limite.

Exercice 14 : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires où X_n suit une loi de Student à n degrés de liberté, dont la densité est donnée par

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Montrer que (X_n) converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Exercice 15 (Lemme de Slutsky) : Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires convergeant respectivement en loi vers X et Y . On suppose que Y est presque sûrement constante.

1. Montrer que la suite $((X_n, Y_n))$ converge en loi vers (X, Y) .
2. Montrer que la suite $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
3. Montrer que la suite $(X_n \cdot Y_n)$ converge en loi vers $X \cdot Y$.

Exercice 16 : Démontrer la loi faible des grands nombre en utilisant les fonctions caractéristiques.

Exercice 17 : Démontrer le théorème central limite en utilisant les fonctions caractéristiques.

Exercice 18 : En utilisant le théorème central limite, déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$