

# 156 - Exponentielle de matrices. Applications.

## I. Généralités

### 1. Exponentielle de matrice

convergence absolu/normale de la série exponentielle, déf de l'exponentielle, continuité, différentiabilité, remarque  $C^\infty$

### 2. Premières propriétés

A,B commutent  $\Rightarrow$  morphisme, image dans  $GL(n, K)$ , exemple, stabilité par conjugaison, exponentielle d'une application linéaire, déterminant, non surjectif dans  $GL(n, \mathbb{R})$ , spectre de l'exponentielle, limite de la suite classique

### 3. Calcul effectif

exponentielle des blocs de Jordan, utilisation de la décomposition de Dunford, du lemme des noyaux

## II. L'application exponentielle

### 1. Image de l'exponentielle

surjectivité si  $K = \mathbb{C}$ , cas de  $\mathbb{R}$ , exemple

### 2. Injectivité de l'application

$\exp(A)$  diagonalisable ssi A diagonalisable, antécédent de l'identité, injectivité sur les matrices diagonalisables

### 3. Nilpotent et Unipotent

L'exponentielle induit un homéo des nilpotents sur les unipotents

## III. Applications

### 1. Systèmes différentiels

dérivée de  $t \mapsto \exp(tA)$ , A et B commute ssi  $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$ , solution d'un système différentiel linéaire, exemples, théorème de Liapounov, morphismes de groupe continu de  $(\mathbb{R}, +)$  dans  $GL(n, \mathbb{C})$

### 2. En topologie

décomposition polaire, homéo de  $S_n$  sur  $S_n^{++}$ , topologie de  $SL(n, \mathbb{R})$ , groupe  $O(p, q)$ ,  $O(n, \mathbb{C})$ , composantes connexes de  $GL(n, \mathbb{R})$

### 3. Sous-groupe de $GL(n, K)$

il existe un voisinage ouvert de Id dans  $GL(n, K)$  ne contenant que le sous-groupe trivial.

### Développements :

- Homéomorphisme de  $S_n$  sur  $S_n^{++}$
- Surjectivité de l'exponentielle de  $M_n(\mathbb{C})$  sur  $GL_n(\mathbb{C})$
- $\exp(A)$  diagonalisable ssi A diagonalisable

### Bibliographie :

- Gourdon, Algèbre
- Beck-Malick-Peyré, Agrégation
- Francinou, Algèbre 2
- Serre, Les matrices