Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Extrait du rapport de jury

C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés qui peuvent être en relation avec les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes ; les groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; fournissent aussi des exemples intéressants. La connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans l'analyse des morphismes de groupes ou pour montrer la connexité de certains groupes.

Plan

I. Généralités

I.1. Partie génératrice d'un groupe

- Définition du sous-groupe engendré par une partie.
- Définition d'une partie génératrice d'un groupe.
- Exemples.
- Définition d'un groupe de type fini.

I.2. Premières propriétés

- Définition du groupe dérivé d'un groupe.
- Propriété universelle du groupe dérivé.
- Si X est une partie génératrice de G , alors $D(G)$ est le plus petit groupe distingué engendré par les commutateurs $[g, h] \in G$ avec $(g, h) \in X^2$.
- Définition du centre d'un groupe.
- Si X est une partie génératrice de G , alors $Z(G)$ est composé des éléments commutant avec chaque élément de X .

II. Groupes abéliens de type fini

II.1. Groupes monogènes et cycliques

- Définition d'un groupe monogène et d'un groupe cyclique.
- Si G est cyclique, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Nombre de générateurs de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- On a $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.
- Théorème Chinois.
- Application : Formules pour l'indicatrice d'Euler.

II.2. Groupes abéliens libres de type fini

- Définition d'une base d'un groupe abélien.
- Définition d'un groupe abélien libre.
- Définition du rang d'un groupe abélien libre.
- Si H est un sous-groupe d'un groupe abélien libre de type fini G , alors H est un groupe abélien libre de type fini et $\text{rang}(H) \leq \text{rang}(G)$.
- Propriété universelle d'un groupe abélien libre de type fini.

II.3. Classification des groupes abéliens de type fini

- Forme normale de Smith d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{Z})$.
- Application : Le groupe $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices de transvections $T_{i,j} = \text{Id}_n + E_{i,j}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$.
- Théorème de structure sur les groupes abéliens de type fini.
- Application : Il y a 3 groupes abéliens d'ordre 120 à isomorphisme près.
- Application : Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.
- Application : Pour chaque diviseur d de l'ordre d'un groupe abélien G , il existe un sous-groupe de G d'ordre d .

III. Exemples de groupes non abéliens.

III.1. Groupe quaternionien

- Le groupe H_8 est engendré par i et j .
- Application : On a $Z(H_8) = D(H_8) = \{1, -1\}$.
- Application : On a $Z(H_8) = D(H_8) = \{1, -1\}$.
- Application : On a $\text{Int}(H_8) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $\text{Aut}(H_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.

III.2. Groupe symétrique

- Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.
- Application : Si $\mathcal{C}$ est un cube dans un espace affine euclidien de dimension 3, alors $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\text{Isom}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Application : Le centre de $\mathfrak{S}_n$ est trivial pour $n \geq 3$.
- Théorème : On a $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n) \simeq \text{Int}(\mathfrak{S}_n)$ si et seulement si $n \neq 6$.
- Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles pour $n \geq 3$.
- Application : Le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

III.3. Le groupe orthogonal

- Définition des groupes $O(q)$ et $SO(q)$ si q est une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel E .
- Définition d'une réflexion et d'un retournement.
- Théorème de Cartan-Dieudonné.
- Si $\dim(E) \geq 3$, alors le groupe $SO(q)$ est engendré par les retournements.
- Le groupe $SO(3)$ est simple.

III.4. Le groupe linéaire

- Le groupe spécial linéaire est engendré par les transvections.
- Le groupe linéaire est engendré par les transvections et les dilatations.
- Application : Le centre du groupe $GL_n(K)$ est constitué des matrices scalaires inversibles.
- Application : Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes.

Remarques sur le plan

Dans cette leçon, il faut mettre de nombreux exemples. Il faut les choisir en fonction de ses préférences. Si on le souhaite, on peut étudier le groupe diédral. Attention, un sous-groupe d'un groupe (infini) de type fini n'est pas nécessairement de type fini (voir la feuille d'exercices).

Si on introduit les résultats classiques sur les générateurs du groupe (spécial) linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou dans un corps commutatif, il faut savoir décomposer une matrice de ces groupes en produit de générateurs.

Développements

Voici une liste non exhaustive de développements possibles pour cette leçon.

- **La simplicité du groupe $SO_3(\mathbb{R})$.**
- **Le groupe des isométries d'un cube.**
- **Le théorème de Cartan-Dieudonné.**
- **Les automorphismes du groupe symétrique.**

Bibliographie

- [Com98] F. COMBES – *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.
- [GH08] D. GUIN et T. HAUSBERGER – *Algèbre I - Groupes, corps et théorie de galois*, EDP Sciences, 2008.
- [Per96] D. PERRIN – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.