

Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Extrait du rapport de jury

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement.

Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

Plan

I. Généralités

I.1. Groupe des permutations

- Définition de $\mathfrak{S}_E$ si E est un ensemble fini et $\mathfrak{S}_n$.
- Cardinal du groupe $\mathfrak{S}_E$.
- Si E est de cardinal n , alors $\mathfrak{S}_E \simeq \mathfrak{S}_n$.
- Théorème de Cayley.

I.2. Cycles

- Définition d'un cycle de longueur k et d'une transposition.
- Définition du support d'une permutation.
- Décomposition d'une permutation en cycles à supports disjoints.
- Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.
- Exemples de systèmes générateurs.

I.3. Classes de conjugaison et signature

- Classes de conjugaison du groupe symétrique.
- Cardinal d'une classe de conjugaison du groupe symétrique.
- Définition : la signature est l'unique morphisme de groupes non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.
- Définition du groupe alterné $\mathfrak{A}_n$.
- Cardinal de $\mathfrak{A}_n$.
- Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$.

II. Sous-groupes remarquables et automorphismes

II.1. Le groupe alterné

- Le groupe $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
- Simplicité du groupe $\mathfrak{A}_n$ si $n \neq 4$.
- Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\text{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$ si $n \neq 4$.
- Un sous-groupe d'indice n dans $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

II.2. Le centre et le groupe dérivé

- Le centre de $\mathfrak{S}_n$ est trivial pour tout $n \geq 3$.
- Le centre de $\mathfrak{A}_n$ est trivial pour tout $n \geq 4$.
- Le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ pour tout $n \geq 3$.
- Le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_n$ est $\mathfrak{A}_n$ pour tout $n \geq 5$.

II.3. Automorphismes du groupe symétrique

- Un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur si et seulement si l'image de chaque transposition est une transposition.
- Théorème : On a $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \text{Int}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n$ si $n \geq 3$ avec $n \neq 6$.
- Un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ est intérieur si et seulement si les sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ sont les stabilisateurs d'un point $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Théorème : On a $\text{Aut}(\mathfrak{S}_6) \neq \text{Int}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6$.

III. Applications

III.1. Géométrie

- Groupe des isométries des solides de Platon.
- Théorème sur les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3.
- Application : La table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_4$.

III.2. Quelques isomorphismes exceptionnels

- Quelques isomorphismes de $\text{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ ou $\text{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$ avec $\mathfrak{S}_m$ ou $\mathfrak{A}_m$.

III.3. Sur un corps fini

- Théorème de Frobenius-Zolotarev.
- Signature de l'automorphisme de Frobenius.

III.4. Les polynômes symétriques

- Définition d'un polynôme symétrique dans $A[X_1, \dots, X_n]$.
- Théorème fondamental des polynômes symétriques dans $A[X_1, \dots, X_n]$.
- Application : Si $a \in \mathbb{C}$ est un entier algébrique, alors a^m est un entier algébrique pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Remarques sur le plan

L'isomorphisme $\mathfrak{S}_E \simeq \mathfrak{S}_n$ cité dans la première partie permet de justifier qu'il est suffisant d'étudier le groupe $\mathfrak{S}_n$. Même si on ne les cite pas dans le plan ci-dessus, il est souhaitable de savoir montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple et de connaître les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$. De même, il est préférable de savoir que

$$D(\mathfrak{A}_4) = \{\text{Id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On peut aussi, si on le souhaite, introduire la notion de matrices de permutations, faire le lien entre déterminant et signature, puis citer le théorème de Brauer ou la décomposition de Bruhat. On peut également introduire la notion de polynômes semi-symétriques et citer le théorème relatif à ces polynômes.

Développements

Voici une liste non exhaustive de développements possibles pour cette leçon.

- **L'isomorphisme entre $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathfrak{S}_5$.**
- **La table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_4$.**
- **Le groupe des isométries d'un cube.**
- **Le théorème de Frobenius-Zolotarev.**
- **Les automorphismes du groupe symétrique.**

Bibliographie

- [Com98] F. COMBES – *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.
 [Per96] D. PERRIN – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.