Groupes finis. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon il faut savoir manipuler correctement les éléments de différentes structures usuel- les ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_n$, etc.) comme, par exemple, en proposer un générateur ou une famille de générateurs, savoir calculer un produit de deux permutations, savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Il est important que la notion d'ordre d'un élément soit mentionnée et comprise dans des cas simples. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit être connu.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. Les groupes d'automorphismes fournissent des exemples très naturels. On peut aussi étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre, les représentations ayant ici toute leur place ; il est utile de connaître les groupes diédraux.

S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite mettre en avant les spécificités de groupes comme le groupe quaternionique, les sous-groupes finis de $\mathrm{SU}(2)$ ou les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Plan

I. Généralités

I.1. Premières propriétés

- Définition de l'ordre d'un élément.
- Théorème de Lagrange.
- Exemples.

I.2. Actions de groupe

- Définition d'une action de groupe.
- Application : Le théorème de Cayley.
- Définition de l'orbite et du stabilisateur d'un point.
- Bijection de $G/\mathrm{Stab}(x)$ sur $\mathrm{Orb}(x)$.
- Formule des classes.
- Application : Le centre d'un p-groupe est non trivial.
- Formule de Burnside.

I.3. Les théorèmes de Sylow

- Définition d'un p-Sylow dans un groupe.
- Théorèmes de Sylow.
- Application : un groupe d'ordre pq avec p, q deux nombres premiers distincts n'est pas simple.
- Théorème de Cauchy.

II. Groupes abéliens finis

II.1. Groupes cycliques

- Définition d'un groupe cyclique.
- Un groupe d'ordre n est cyclique si et seulement si $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Sous-groupes d'un groupe cyclique.
- Générateurs d'un groupe cyclique.
- Automorphismes d'un groupe cyclique.
- Théorème chinois.

II.2. Structure des groupes abéliens finis

- Théorème de structure sur les groupes abéliens finis.
- Application : Il y a 3 groupes abéliens d'ordre 120 à isomorphisme près.
- Application : Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.
- Application : Pour chaque diviseur d de l'ordre d'un groupe abélien G, il existe un sous-groupe de G d'ordre d.

III. Exemples de groupes finis non abéliens.

III.1. Groupe symétrique

- Définition de $\mathfrak{S}_n$. Générateurs et centre de $\mathfrak{S}_n$.
- Définition de la signature et de $\mathfrak{A}_n$. Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$.
- Application : Le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.
- Théorème : On a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ si et seulement si $n \neq 6$.

III.2. Groupe diédral

- Définition de D_n. Générateurs et centre de D_n.

III.3. Groupe quaternionien

- Définition de H_8. Générateurs et centre de H_8.
- Remarque : Tous les sous-groupes de H_8 sont distingués.

IV. Autour du groupe linéaire

IV.1. Théorème de Burnside

- Théorème de Burnside.

IV.2. Géométrie

- Groupe des isométries des solides de Platon.
- Théorème sur les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

IV.3. Sur un corps fini

- Théorème de Frobenius-Zolotarev.

Remarques sur le plan

On ne peut pas parler de tout dans cette leçon, il faut faire des choix pour ne pas dépasser les trois pages. En fonction de ses préférences, on peut développer d'avantage les exemples au détriment de la partie théorique du début.
On peut également, si on le souhaite, aborder la notion de représentation d'un groupe fini dans cette leçon.

Développements

Voici une liste non exhaustive de développements possibles pour cette leçon.

- **L'isomorphisme entre $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathfrak{S}_5$.**
- **La table des caractères du groupe diédral.**
- **La table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_4$.**
- **Le groupe des isométries d'un cube.**
- **Le théorème de Burnside.**
- **Le théorème de Frobenius-Zolotarev.**
- **Les automorphismes du groupe symétrique.**

Bibliographie

[Com98] F. Combes – *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.
[Per96] D. Perrin – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.