Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Exercice 1 : Un groupe dont tous les sous-groupes sont distingués est-il nécessairement abélien ?

Exercice 2 : Montrer que si H est un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe G, alors H est distingué dans G.

Exercice 3 : Soit G un groupe d'ordre $2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que G admet un sous-groupe d'indice 2.

Exercice 4 : Soit G un groupe infini. On suppose que G admet un sous-groupe propre H d'indice fini. Montrer que G n'est pas simple.

Exercice 5 : Soit G un groupe fini d'ordre $n \geqslant 2$. On note p le plus petit facteur premier p de n. Montrer que si H est un sous-groupe de G d'indice p, alors H est distingué dans G.

Exercice 6 : Soit G un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier.

1. Montrer que le centre de G n'est pas trivial.
2. En déduire que $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

Exercice 7 : Soit G un groupe d'ordre p^n où $n \in \mathbb{N}^*$ et p est un nombre premier. Montrer que pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, il existe un sous-groupe distingué dans G d'ordre p^k.

Exercice 8 : Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 : Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $k < n$. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_k$.

Exercice 10 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Déterminer les morphismes de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.
2. En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 11 : Soit $n \geqslant 5$. Montrer qu'un sous-groupe H d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 12 : Montrer que si G est un groupe simple d'ordre 60, alors G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 13 : Déterminer les groupes d'ordre 15 à isomorphisme près.

Exercice 14 : Déterminer les groupes d'ordre 255 à isomorphisme près.

Exercice 15 : Montrer qu'un groupe d'ordre 140 n'est pas simple.

Exercice 16 : Montrer qu'un groupe d'ordre 150 n'est pas simple.

Exercice 17 : Montrer qu'un groupe d'ordre 132 n'est pas simple.

Exercice 18 : On suppose qu'il existe un groupe simple G d'ordre 180.

1. Montrer que le nombre de 5-Sylow est 36.
2. Montrer que le nombre de 3-Sylow est 10.
3. Montrer que si H et K sont deux 3-Sylow de G dont l'intersection est non triviale, alors le normalisateur N de $H \cap K$ est d'ordre 18.
4. En déduire que l'intersection de deux 3-Sylow distincts de G est triviale.
5. Conclure qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 180.

Exercice 19 : Pour quel couple $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ les groupes $\mathfrak{S}_m$ et D_n sont-ils isomorphes ?

Exercice 20 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le groupe U/U_n.

Exercice 21 : Soit G un groupe engendré par $X \subset G$. Montrer que le groupe dérivée $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G engendré par

$$\{ghg^{-1}h^{-1} \in G \mid (g, h) \in X^2\}.$$

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$

1. Déterminer le centre et le groupe dérivé de D_n.
2. Déterminer le groupe $\mathrm{Int}(D_n)$ à isomorphisme près.
3. Montrer que $\mathrm{Aut}(D_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ où $\varphi(k) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est la multiplication par k pour tout $k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 23 : On note H_8 la groupe quaternionien.

1. Déterminer le centre et le groupe dérivé de H_8.
2. Déterminer le groupe $\mathrm{Int}(H_8)$ à isomorphisme près.
3. Déterminer le groupe $\mathrm{Aut}(H_8)$.

Exercice 24 : Soit G un groupe fini.

1. Montrer que le dual de G est isomorphe au dual de l'abélianisé de G.
2. En déduire que le dual de G est isomorphe à l'abélianisé de G.

Exercice 25 : Soient K un corps commutatif et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{SL}_n(K) \rtimes K^*$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{SL}_n(K) \times K^*$ si et seulement si le morphisme de groupes $\pi_n : K^* \to K^*$ défini par $\pi_n(x) = x^n$ est un automorphisme.

Indications

Exercice 1 : Non, considérer $G = H_8$.

Exercice 3 : Utiliser le théorème de Cayley.

Exercice 4 : Faire agir G sur G/H par translation des classes.

Exercice 5 : Faire agir G sur G/H par translation. En étudiant le cardinal du noyau et de l'image de $\varphi : G \to \mathrm{Bij}(G/H)$, montrer que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Exercice 6 : Pour la première question, faire agir G sur lui même par conjugaison et utiliser la formule des classes.

Exercice 7 : Faire une récurrence sur n et utiliser que $Z(G) \neq \{e\}$.

Exercice 8 : Utiliser la simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \neq 4$.

Exercice 9 : Le noyau du morphisme est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 10 : Pour la première question, utiliser que le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions et que ces dernières sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 11 : Faire agir $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathfrak{S}_n/H$ par translation. Comme l'on connait les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$, on en déduit que le morphisme de groupes induit $\varphi : H \to \mathrm{Bij}(\mathfrak{S}_n/H)$ est injectif. De plus, les éléments de $\varphi(H)$ fixent la classe H, donc on obtient le résultat.

Exercice 12 : Le nombre de 5-Sylow est 6, donc G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$. Par simplicité, on a $G = D(G) \subset D(\mathfrak{S}_6) = \mathfrak{A}_6$. Ensuite, on utilise la même méthode que dans l'exercice précédent pour montrer que G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$. Finalement, comme avant, on a $G = D(G) \subset D(\mathfrak{S}_5) = \mathfrak{A}_5$ et on conclut avec le cardinal.

Exercice 13 : Avec les théorèmes de Sylow, on a $n_3 = n_5 = 1$. On en déduit que $G \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 14 : On a $G \simeq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Exercice 15 : Montrer qu'il n'y a un unique 7-Sylow.

Exercice 16 : Si G est simple et d'ordre 150, alors le nombre de 5-Sylow est 6. On en déduit un morphisme de groupes injectif de G dans $\mathfrak{S}_6$, donc 150 divise l'entier 6!, ce qui donne une contradiction.

Exercice 17 : Si G est simple, on en déduit que $n_2 \geqslant 3$, $n_3 \geqslant 4$ et $n_{11} = 12$. En minorant le nombre d'éléments dans G qui sont d'ordre 2, 4, 3 ou 11, on obtient

$$132 = \mathrm{Card}(G) \geqslant 4 + n_3 \cdot (3-1) + n_{11} \cdot (11-1) + 1 \geqslant 133,$$

d'où le résultat.

Exercice 18 :

1. Comme G est simple, le nombre de 5-Sylow est 6 ou 36. Supposons que l'on soit dans le premier cas, alors G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$. On en déduit que $G = D(G) \subset D(\mathfrak{S}_6) = \mathfrak{A}_6$. Finalement, G est d'indice 2 dans le groupe simple $\mathfrak{A}_6$, donc il est distingué dans $\mathfrak{A}_6$, d'où la contradiction.
2. Comme G est simple, le nombre de 3-Sylow est 4 ou 10. S'il y en avait 4, alors on aurait un morphisme injectif de G dans $\mathfrak{S}_4$, ce qui est impossible.
3. Supposons qu'il existe deux 3-Sylow H et K d'intersection non triviale. Comme H et K sont d'ordre 9, il sont abéliens, donc H et K sont inclus dans N. On a donc que l'ordre de N est 18, 36, 45 ou 90. Comme l'action transitive de G sur l'ensemble G/N induit un morphisme injectif de G dans le groupe $\mathrm{Bij}(G/N)$, on en déduit que $\mathrm{Card}(N) = 18$.
4. En reprenant la question précédente, on en déduit que H et K sont des 3-Sylow du groupe N qui est d'ordre 18. Comme un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow, on a finalement $H = K$.
5. On déduit des questions précédentes qu'il y a $144 = (5-1) \cdot 36$ éléments d'ordre 5 dans G et $80 = (9-1) \cdot 10$ éléments d'ordre 3, donc $\mathrm{Card}(G) \geqslant 224$, d'où la contradiction.

Exercice 19 : Le groupe D_n contient un sous-groupe d'indice 2 qui est cyclique. Ce n'est le cas pour $\mathfrak{S}_m$ que si $m \leqslant 3$. On en déduit que les seuls isomorphismes sont $\mathfrak{S}_2 \simeq D_1$ et $\mathfrak{S}_3 \simeq D_3$.

Exercice 20 : En utilisant le théorème d'isomorphisme avec le morphisme de groupes $f : \mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_n,\ z \mapsto z^n$, on obtient que $\mathrm{U}/\mathrm{U}_n \cong \mathrm{U}$.

Exercice 22 : Si n est impair, on a $Z(D_n) = \{\mathrm{Id}\}$, le groupe dérivé de D_n est le sous-groupe des rotations et $\mathrm{Int}(D_n) \simeq D_n$. Si n est pair, on a $Z(D_n) = \{\pm\mathrm{Id}\}$, le groupe dérivé de D_n est l'unique sous-groupe d'indice 2 du sous-groupe des rotations et $\mathrm{Int}(D_n) \simeq D_{n/2}$. Soit $r \in D_n$ qui engendre le sous-groupe des rotations et $s \in D_n$ une réflexion. Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(D_n)$, alors il existe un unique couple $(k, \ell) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\alpha(r) = r^k$ et $\alpha(s) = r^\ell s$. On vérifie que l'application définie par $\psi(\alpha) = (\ell, k)$ est un isomorphisme.

Exercice 23 : Par un calcul direct, on a $Z(H_8) = D(H_8) = \{\pm 1\}$. On en déduit $\mathrm{Int}(H_8) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et $\mathrm{Aut}(H_8) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Exercice 25 : Pour la seconde question, si on suppose que l'on a un isomorphisme $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{SL}_n(K) \times K^*$, alors en considérant le centre, on obtient un isomorphisme $K^* \simeq \mathrm{Ker}(\pi_n) \times K^*$. En considérant le sous-groupe des éléments d'ordre n, on obtient $\mathrm{Ker}(\pi_n) \simeq \mathrm{Ker}(\pi_n)^2$, donc $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ est trivial et π_n est injective. Pour la surjectivité, l'hypothèse implique l'existence de morphismes de groupes injectifs $\alpha : \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ et $\beta : K^* \to \mathrm{GL}_n(K)$ tels que

$$\varphi : \mathrm{SL}_n(K) \times K^* \to \mathrm{GL}_n(K), \quad (M, x) \mapsto \alpha(M)\beta(x)$$

soit un isomorphisme. Dans la suite, on suppose que $(n, K) \neq (2, \mathbb{F}_2)$ et que $(n, K) \neq (2, \mathbb{F}_3)$. Dans ces deux cas, on peut vérifier le résultat directement. Comme $D(\mathrm{GL}_n(K)) = D(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$, on en déduit que α est un automorphisme de $\mathrm{SL}_n(K)$. De plus, on a que $\varphi(\{\mathrm{Id}\} \times K^*) \subset Z(\mathrm{GL}_n(K))$. On en déduit qu'il existe un morphisme de groupes $\lambda : K^* \to K^*$ tel que

$$\forall x \in K^*, \quad \beta(x) = \mathrm{Diag}(\lambda(x), \ldots, \lambda(x)).$$

Comme l'application $\det \circ \varphi : \mathrm{SL}_n(K) \times K^* \to K^*$ est surjective et que l'on a la relation $\det(\varphi(M, x)) = \lambda(x)^n$, on en déduit que π_n est surjective.