Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, il faut non seulement évoquer les notions de groupe quotient, de sous-groupe dérivé et de groupe simple mais surtout savoir les utiliser et en expliquer l'intérêt. On pourra utiliser des exemples issus de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre linéaire (utilisation d'espaces vectoriels quotients par exemple). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme ; mais, lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple).

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions à l'aide d'une table de caractères et décrire le treillis des sous-groupes distingués, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé, d'un groupe fini à l'aide de cette table.

Plan

I. Généralités

I.1. Sous-groupe distingué

- Définition d'un sous-groupe distingué.
- Le noyau d'un morphisme de groupes est distingué.
- Un sous-groupe d'indice 2 est distingué.
- Exemple : $\mathrm{SL}_n(K)$ est distingué dans $\mathrm{GL}_n(K)$.
- Exemple : Le sous-groupe des rotations est distingué dans D_n.

I.2. Groupe quotient

- Définition de la structure de groupe quotient.
- Un sous-groupe est distingué si et seulement si c'est le noyau d'un morphisme de groupes.
- Application : $\mathfrak{A}_n$ est l'unique sous-groupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$.
- Propriété universelle du groupe quotient.
- Correspondance bijective entre les sous-groupes de G/H et les sous-groupes de G contenant H.

I.3. Les théorèmes d'isomorphismes

- Premier théorème d'isomorphisme.
- Corollaire : On a $\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ker}(f)) \cdot \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(f))$.
- Second théorème d'isomorphisme.
- Corollaire : On a $\mathrm{Card}(HK) = \mathrm{Card}(H) \cdot \mathrm{Card}(K)/\mathrm{Card}(H \cap K)$.
- Troisième théorème d'isomorphisme.

II. Sous-groupes distingués remarquables

II.1. Le centre d'un groupe

- Définition du centre d'un groupe.
- Le centre d'un groupe est un sous-groupe distingué.
- Exemples : centre du groupe symétrique, du groupe diédral.
- Le centre d'un p-groupe n'est pas trivial.
- Application : Un groupe d'ordre p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

II.2. Le groupe dérivé

- Définition du groupe dérivé et de l'abélianisé d'un groupe.
- Le groupe dérivé est un sous-groupe distingué.
- Définition de l'abélianisé d'un groupe.
- Exemple : groupe dérivé et abélianisé du groupe symétrique, de $\mathrm{GL}_n(K)$.
- Le dual d'un groupe fini G est isomorphe à l'abélianisé de G.
- Propriété universelle du groupe dérivé.
- Théorème de Frobenius-Zolotarev.

II.3. Les automorphismes intérieurs

- Définition : automorphisme intérieur et $\mathrm{Int}(G)$.
- La partie $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.
- Isomorphisme $\mathrm{Int}(G) \simeq G/Z(G)$.
- Exemples : $\mathrm{Int}(H_8) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) \simeq \mathfrak{S}_n$ si $n \geqslant 3$.

III. Dévissage des groupes

III.1. Simplicité d'un groupe

- Définition d'un groupe simple.
- Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$.
- Corollaire : Sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 5$.
- Application : Isomorphisme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$.
- Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

III.2. Produit direct

- Théorème d'isomorphisme à un produit direct.
- Application : si $\mathscr{P}$ est un polyèdre régulier et convexe dans un espace affine euclidien de dimension 3, on a $\mathrm{Isom}(\mathscr{P}) \simeq \mathrm{Isom}^+(\mathscr{P}) \times \{\pm 1\}$.
- On a $\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.3. Produit semi-direct

- Définition du produit semi-direct.
- Théorème d'isomorphisme à un produit semi-direct.
- Exemples : $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Application : Classification des groupes d'ordre pq.
- Application : Classification des groupes d'ordre 8.

Remarques sur le plan

Dans le cas où on choisit d'utiliser le produit semi-direct dans son plan, il faut être à l'aise avec cette notion (voir [Per96]). Il est possible de donner d'autres résultats sur la simplicité de certains groupes (exemple : $\mathrm{PSL}_n(K)$).
On peut aussi choisir d'aborder la notion de résolubilité d'un groupe ou d'introduire la notion de normalisateur d'un sous-groupe. Dans ce dernier cas, il faut énoncer le théorème de Noether (voir [Com98]).

Développements

Voici une liste non exhaustive de développements possibles pour cette leçon.

- **L'isomorphisme entre $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathfrak{S}_5$.**
- **La simplicité du groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.**
- **Le théorème de Frobenius-Zolotarev.**

Bibliographie

[Com98] F. Combes – *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[Per96] D. Perrin – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.