

Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Exercice 1 : Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer $U_m \cap U_n$ et $U_m \cdot U_n$.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le groupe U/U_n .

Exercice 3 : Exhiber un sous-groupe propre de U qui n'est pas de type fini.

Exercice 4 : Déterminer les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

Exercice 5 : Déterminer les morphismes de groupes continues de $\mathbb{R}$ dans U .

Exercice 6 : Déterminer les morphismes de groupes continues de U dans U .

Exercice 7 : Calculer le polynôme cyclotomique Φ_n pour $1 \leq n \leq 12$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si n est pair, montrer que $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(X^2)$.
2. Si n est impair, montrer que $\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X)$.

Exercice 9 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier.

1. Si p divise n , montrer que $\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p)$.
2. Si p ne divise pas n , montrer que $\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p)/\Phi_n(X)$.

Exercice 10 : Soient $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\Phi_{p^k}(X) = \Phi_p(X^{p^{k-1}}).$$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la relation

$$\Phi_n = \prod_{d|n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)}.$$

où $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{\pm 1\}$ est la fonction de Möbius.

Exercice 12 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\deg(\Phi_n) \geq \frac{n \ln(2)}{\ln(n) + \ln(2)}.$$

Exercice 13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $P(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$.

1. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}$.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right).$$

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer les expressions suivantes.

$$\sum_{z \in U_n} z^p, \quad \prod_{z \in U_n} z, \quad \sum_{z \in U_n} |z - 1|, \quad \sum_{\substack{z \in U_n \\ z \neq 1}} \frac{1}{1 - z}.$$

Exercice 15 : Quelles sont les racines de l'unité appartenant à $\mathbb{Q}(i)$?

Exercice 16 : Montrer que $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ ne contient pas d'élément d'ordre 5.

Exercice 17 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une partie finie $D \subset \mathbb{N}$ telle que si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ est d'ordre fini, alors $\mathrm{ord}(M) \in D$.

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont l'ordre fini.

1. Montrer que $\{\chi_M \in \mathbb{Z}[X] \mid M \in \Omega_n\}$ est un ensemble fini.
2. En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $M \in \Omega_n$, on a $M^r = \mathrm{I}_n$.

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. On fixe $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier impair et on note $\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ la réduction modulo p .

1. Montrer que la restriction de π à G est injective.
2. En déduire une majoration de l'ordre de G en fonction de n .

Exercice 20 : Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^n$ tel que $G \subset \mathrm{O}(\varphi)$.
2. En déduire que les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont cycliques.

Indications

Exercice 1 : On trouve $U_m \cap U_n = U_{m \wedge n}$ et $U_m \cdot U_n = U_{m \vee n}$.

Exercice 2 : En utilisant le théorème d'isomorphisme avec le morphisme de groupes $f : U_n \rightarrow U_n$, $z \mapsto z^n$, on obtient que $U/U_n \cong U$.

Exercice 3 : On peut considérer l'ensemble des racines de l'unité qui est un sous-groupe de U .

Exercice 4 : On trouve U et U_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 : En utilisant le théorème du relèvement, on trouve $f(t) = \exp(iat)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit $f : U \rightarrow U$ un morphisme de groupes continue. L'application $t \mapsto f(e^{it})$ est un morphisme de groupes continue de $\mathbb{R}$ dans U . D'après l'exercice précédent, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(e^{it}) = e^{iat}.$$

Comme $1 = f(1) = f(e^{i2\pi}) = e^{ia2\pi}$, on obtient que $a \in \mathbb{Z}$ et que $f(z) = z^a$ pour tout $z \in U$. Réciproquement, cette application est un morphisme de groupes continu de U dans U .

Exercice 11 : Utiliser la formule d'inversion de Möbius.

Exercice 13 : En évaluant l'expression en $X = 1$ et $X = e^{-2i\theta}$, on trouve

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) = \frac{\sin(n\theta)}{2^{n-1}}.$$

Exercice 15 : Si $z \in \mathbb{Q}(i)$ est une racine de l'unité, alors son polynôme minimal P sur $\mathbb{Q}$ est de degré 1 ou 2. De plus, on sait que P est un polynôme cyclotomique. En étudiant les polynômes cyclotomiques de degré 1 et de degré 2, on conclut que $z \in \{1, -1, i, -i\}$. Réciproquement, ces éléments sont des racines de l'unité et sont dans $\mathbb{Q}(i)$.

Exercice 16 : Étudier le polynôme caractéristique de A .

Exercice 17 : Utiliser que le polynôme minimal de M se décompose en produit de polynômes cyclotomiques, puis utiliser que $\deg(\Phi_n) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 18 : Utiliser que les racines de χ_M sont de module 1 et les relations coefficients-racines.

Exercice 19 : Si $M \in \text{Ker}(\pi) \cap G$, on peut écrire $M = I_n + pN$ où $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que N est diagonalisable et a des valeurs propres de module strictement inférieur à 1. En utilisant que N est à coefficients entiers, en déduire que $N = 0$.

Exercice 20 : On définit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} (g(x) \mid g(y)).$$

Pour la seconde question, utiliser que $\text{SO}_2(\mathbb{R}) \simeq U$.