# Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

## Extrait du rapport de jury

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects élémentaires. Elle doit donner l'occasion d'expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques (exponentielle complexe et ses applications, polynômes cyclotomiques, spectre de matrices remarquables, théorie des représentations). Il ne faut pas non plus oublier la partie « groupe »de la leçon : on pourra s'intéresser au relèvement du groupe unité au groupe additif des réels et aux propriétés qui en résultent. De même, il est pertinent d'étudier les sous-groupes finis de $S^1$ dans cette leçon.

On pourra aussi s'intéresser aux groupes des nombres complexes de $\mathbb{Q}(i)$, et les racines de l'unité qui y appartiennent ; tout comme aux sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$. Les transformées de Fourier discrètes et rapides peuvent aussi être abordées dans cette leçon.

## Plan

### I. Le groupes des nombres complexes de module 1

#### I.1. Généralités

- Définition du groupe avec $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
- Isomorphisme $\mathbb{C}^* \simeq \mathrm{U} \times \mathbb{R}_+^*$.
- U est l'unique sous-groupe non trivial compact et connexe de $\mathbb{C}^*$.

#### I.2. L'exponentielle complexe

- Définition de l'exponentielle par sa série entière.
- Théorème : l'exponentielle est un morphisme de groupes continu de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ et il existe un unique $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathrm{Ker}(\exp) = ia\mathbb{Z}$.
- Définition de $\pi$.
- Propriété : L'application $\mathbb{R} \to \mathrm{U}$, $t \mapsto \exp(it)$ est un morphisme de groupes surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.
- Un sous-groupe de U est fini ou dense dans U.
- Théorème du relèvement pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathrm{U}$.
- Les morphismes de groupes continus $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ sont les $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

#### I.3. Les fonctions cos et sin

- Définition des fonctions cos et sin.
- Formules d'addition, Formule de Moivre, Formule d'Euler.
- Application : Linéarisation d'un polynôme en cos et sin.
- Application : la fonction $x \mapsto \cos(nx)$ est un polynôme en cos.

#### I.4. Utilisation en géométrie

- Isomorphisme $\mathrm{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
- Définition de l'argument d'un nombre complexe.
- Définition de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté.
- Définition de l'angle orienté entre deux vecteurs d'un plan euclidien.
- Définition de la mesure d'un angle orienté entre deux vecteurs d'un plan euclidien orienté.

# II. Racines de l'unité et polynômes cyclotomiques

## II.1. Généralités

- Définition de $\mathrm{U}_n = \{z \in \mathrm{U} \mid z^n = 1\}$.
- $\mathrm{U}_n$ est l'unique sous-groupe de U de cardinal $n$.
- Expression des éléments de $\mathrm{U}_n$ avec l'exponentielle.
- Le groupe $\mathrm{U}_n$ est cyclique.
- Définition d'une racine primitive $n$-ième de l'unité.
- Nombre de racines primitives $n$-ième de l'unité.

## II.2. Les polynômes cyclotomiques

- Définition de $\Phi_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Propriétés classiques de $\Phi_n$.
- Irréductibilité de $\Phi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

## II.3. Application en algèbre commutative

- Théorème de Wedderburn.

## II.4. Application en arithmétique

- Théorème de Dirichlet faible.

## II.5. Application en géométrie

- Définition : point constructible à la règle et au compas.
- Théorème de Wantzel.
- Théorème de Wantzel-Gauss.

# III. Divers applications aux matrices

- Théorème : réduction d'une matrice unitaire.
- Application : Le groupe $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
- Théorème de Burnside sur les groupes d'exposants finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
- Le cardinal d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est au plus $\mathrm{Card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_3))$.

# Remarques sur le plan

Le plan présenté est un peu long, donc on peut retirer certaines parties en fonction des préférences personnelles. On peut également intégrer quelques résultats sur les représentations d'un groupe fini dans un espace vectoriel complexe (par exemple, on peut donner la table des caractères d'un groupe cyclique).

# Développements

Voici une liste non exhaustive de développements possibles pour cette leçon.

- **L'irréductibilité des polynômes cyclotomiques.**
- **Le théorème de Dirichlet faible.**
- **Le théorème de Wedderburn.**

# Bibliographie

[Aud06] M. Audin – *Géométrie*, EDP Sciences, 2006.

[Com98] F. Combes – *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.

[FGN09] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas – *Oraux x-ens, algèbre 2, 2e édition*, Cassini, 2009.

[Per96] D. Perrin – *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

[Tau06] P. Tauvel – *Analyse complexe pour la licence 3*, Dunod, 2006.