Le théorème de Maschke et le lemme de Schur

1. Le développement

Soit G un groupe fini. Dans le développement, tous les espaces vectoriels considérés sont sur le corps $\mathbb{C}$ et de dimension finie.

Théorème de Maschke : *Toute représentation de G dans un espace vectoriel complexe de dimension finie se décompose en somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration :
1) Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ une représentation et F un sous-espace vectoriel stable par ρ. On montre que F admet un supplémentaire S dans E stable par ρ. Soit $p : E \to F$ une projection sur F. On définit

$$q = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \quad \text{avec} \quad N = \mathrm{Card}(G).$$

Comme F est stable par ρ, on a $\mathrm{Im}(q) \subset F$. De plus, pour tout $x \in F$, on a

$$q(x) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p(\rho(g)^{-1}(x)) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho(g)(\rho(g)^{-1}(x)) = \frac{N}{N} x = x.$$

Ainsi q est un projecteur de E sur F. On note $S = \mathrm{Ker}(q)$ qui est un supplémentaire de F dans E. Finalement, pour tout $h \in G$, on a

$$\rho(h) \circ q \circ \rho(h)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ p \circ \rho(hg)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} = q,$$

donc $\rho(h)$ et q commutent. On en déduit que $S = \mathrm{Ker}(q)$ est stable par ρ.

2) On en déduit le résultat par récurrence sur $\dim(E)$. Si $\dim(E) = 1$ le résultat est évident. Supposons que $\dim(E) > 1$. Si E est irréductible, c'est trivial. Si E n'est pas irréductible, alors il existe par définition un sous-espace vectoriel F de E stable par ρ avec $0 < \dim(F) < \dim(E)$. Par le premier point, il existe un sous-espace S de E stable par ρ tel que $E = F \oplus S$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à F et à S. □

Lemme de Schur : *Soient $\rho_1 : G \to E_1$ et $\rho_2 : G \to E_2$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire vérifiant*

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On a les propriétés suivantes.

(i) Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, on a $f = 0$.

(ii) Si $\rho_1 = \rho_2$, alors f est une homothétie.

Démonstration :
1) On montre la contraposé. Le sous-espace $\mathrm{Ker}(f)$ de E_1 est stable par ρ_1. Comme $f \neq 0$, on en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ par irréductibilité de ρ_1. De même, le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de E_2 est stable par ρ_2. Comme $f \neq 0$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = E_2$ par irréductibilité de ρ_2, donc f est un isomorphisme.
2) Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, l'endomorphisme f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Le sous-espace $E_\lambda(f)$ de E_1 est stable par ρ_1, donc $E_1 = E_\lambda(f)$ par irréductibilité de ρ_1 et f est l'homothétie de rapport λ. □

Références :
- Chapitre 1, Théorème 1 et Théorème 2 de [Ser98].
- Chapitre 2, Proposition 4 de [Ser98].

2. Remarques sur le développement

2.1. Une autre démonstration du théorème de Maschke

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ une représentation de G. Si $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit hermitien sur E, on peut définir $\varphi : E^2 \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{\mathrm{Card}(G)} \sum_{g \in G} (\rho(g)(x) \mid \rho(g)(y)).$$

On vérifie facilement que φ est un produit hermitien sur E et que les éléments de $\rho(G)$ sont des isométries pour φ. De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par ρ, on vérifie que l'orthogonal de F pour φ est stable par ρ. On peut conclure comme dans le développement par récurrence.

2.2. Conséquences théoriques du lemme de Schur

Le lemme de Schur est un résultat central dans la démonstration de l'orthogonalité des caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes. On a également le résultat suivant.

Théorème : *Un groupe fini G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.*

<u>DÉMONSTRATION :</u>
1) Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ une représentation irréductible. Pour tout $h \in G$, on a

$$\forall g \in G, \quad \rho(h) \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \rho(h).$$

Par le lemme de Schur, on en déduit que $\rho(h)$ est une homothétie. En particulier, chaque droite D de E est stable par ρ, donc $E = D$ par irréductibilité de ρ.
2) Réciproquement, on note $E = \mathscr{F}(G, \mathbb{C})$ et on note la représentation régulière

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(E), \quad \rho(g)(f)(h) = f(g^{-1}h).$$

Cette représentation est fidèle. Par hypothèse, E est la somme directe de droites vectorielles $D_1, \dots, D_r$ stables par ρ. On conclut que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(D_r) \simeq (\mathbb{C}^*)^r$, donc G est abélien. □

3. Généralisations et contre-exemples

3.1. Le théorème de Maschke

On peut s'intéresser à la situation si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un autre corps K. Le théorème de Maschke se généralise à l'énoncé suivant.

Théorème de Maschke : *Soit K un corps. Si K est de caractéristique nulle ou si G est de cardinal premier avec la caractéristique de K, toute représentation de G dans un espace vectoriel de dimension finie sur K se décompose en somme directe de représentations irréductibles.*

<u>DÉMONSTRATION :</u>
La démonstration est la même que celle du développement, car on peut définir le projecteur q de la même manière. □

Remarque : La seconde démonstration présentée dans la partie précédente ne se généralise pas aussi facilement. On peut considérer à la place de $(\cdot \mid \cdot)$ une forme bilinéaire non dégénérée sur E, mais il n'est pas nécessairement vrai que la forme bilinéaire φ est non dégénérée.

Attention : Si K est de caractéristique $p > 0$, alors le théorème est faux. En effet, la représentation $\rho : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(K)$ où

$$\forall a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad \rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

n'est pas irréductible car $D = \mathrm{Vect}((1,0))$ est stable par ρ. Cependant, cette représentation n'admet aucune autre sous-représentation, donc il est impossible de la décomposer en somme de représentations irréductibles.

3.2. Le lemme de Schur

On peut généraliser le lemme de Schur en remplaçant $\mathbb{C}$ par un autre corps.

Lemme de Schur : *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K. Soient $\rho_1 : G \to E_1$ et $\rho_2 : G \to E_2$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire vérifiant*

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On a les propriétés suivantes.

(i) Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, on a $f = 0$.

(ii) Si $\rho_1 = \rho_2$ et K est algébriquement clos, alors f est une homothétie.

DÉMONSTRATION :

La démonstration est la même que celle dans le développement. □

Attention : Si le corps K n'est pas algébriquement clos, le second point du théorème est faux. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on considère la représentation

$$\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \quad \overline{k} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la rotation $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif, on a

$$\forall g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad f_\theta \circ \rho(g) = \rho(g) \circ f_\theta,$$

mais f_θ n'est pas une homothétie.

4. Un exemple de décomposition

Le groupe $\mathfrak{S}_3$ agit linéairement sur $\mathbb{C}^3$ en permutant les vecteurs de la base canonique, ce qui revient à considérer

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3, \quad \forall z \in \mathbb{C}^3, \quad \sigma \cdot z = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}).$$

Cette action de groupe induit une représentation $\rho : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. Nous allons décomposer cette représentation sans utiliser la théorie des caractères. En étudiant les endomorphismes de $\rho(\mathfrak{S}_3)$, on remarque qu'ils admettent une unique droite stable commune $D = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. On remarque également que

$$H = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

est un sous-espace stable par ρ.

- Comme $\dim(D) = 1$, la représentation $\rho_D : G \to \mathrm{GL}(D)$ est irréductible.
- La représentation $\rho_H : G \to \mathrm{GL}(H)$ est irréductible, sinon il existerait une droite stable par ρ dans H. Or on a montré que D est la seule droite vectorielle de $\mathbb{C}^3$ stable par ρ.

Finalement, on a décomposé ρ en somme directe de représentations irréductibles.

Remarque : Par la théorie des caractères, on sait qu'il y a exactement trois représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ à isomorphisme près.

- La représentation triviale (qui correspond à ρ_D ci-dessus).
- La signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^*$.
- Une représentation irréductible de degré 2 (qui correspond à ρ_H ci-dessus).

Bibliographie

[Ser98] J.-P. SERRE – *Représentations linéaires des groupes finis, 5e édition*, Hermann, 1998.