

Le groupe des isométries d'un cube

1. Le développement

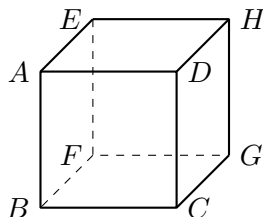
On fixe un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. On considère un cube $\mathcal{C}$ de côté $c > 0$ comme l'ensemble de ses sommets.

Théorème : *On a les isomorphismes de groupes suivants.*

$$\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \text{et} \quad \text{Isom}(\mathcal{C}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

DÉMONSTRATION :

1) On détermine le cardinal de $\text{Isom}(\mathcal{C})$. En utilisant les réflexions par rapport au plan médiateur d'une des arêtes du cube, on remarque que l'action naturelle de $\text{Isom}(\mathcal{C})$ sur $\mathcal{C}$ est transitive. Comme le groupe $\text{Stab}(A)$ agit sur l'ensemble des sommets voisins de A



$$X = \{M \in \mathcal{C} \mid AM = c\} = \{B, E, F\},$$

on en déduit un morphisme de groupes $\eta : \text{Stab}(A) \rightarrow \text{Bij}(X)$. Ce morphisme est injectif, car si $\sigma \in \text{Ker}(\eta)$, alors σ fixe les quatre points A, B, D, E qui sont non coplanaires, donc $\sigma = \text{Id}$. De plus, l'image par η des réflexions par rapport au plan (ABH) , (AFD) et (ACE) sont respectivement dans $\text{Bij}(X)$ les transpositions $(E D)$, $(E B)$ et $(B D)$. Comme ces dernières engendrent $\text{Bij}(X)$, on conclut que η est un isomorphisme. Finalement,

$$\text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{C})) = \text{Card}(\text{Orb}(A)) \cdot \text{Card}(\text{Stab}(A)) = 8 \cdot 6 = 48.$$

De plus, si on note O le centre du cube et qu'on désigne par s_M la symétrie centrale par rapport à $M \in \mathcal{C}$, alors l'application $\sigma \mapsto \sigma \circ s_O$ est une bijection de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ sur $\text{Isom}^-(\mathcal{C})$, donc $\text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{C})) = 24$.

2) On considère l'ensemble des grandes diagonales du cube

$$D = \{[AG], [EC], [BH], [DF]\} = \{[MN] \mid (M, N) \in \mathcal{C}^2, \quad MN = c\sqrt{3}\}.$$

Comme chaque élément $\sigma \in \text{Isom}(\mathcal{C})$ préserve les sommets de $\mathcal{C}$ et les longueurs, on en déduit que $\sigma(D) \subset D$. En particulier, le groupe $\text{Isom}(\mathcal{C})$ agit naturellement sur D . Cette action induit un morphisme de groupes

$$\lambda : \text{Isom}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Bij}(D).$$

Si r est la réflexion par rapport au plan (ADG) , alors

$$r([AG]) = [AG], \quad r([EC]) = [BH], \quad r([BH]) = [EC] \quad \text{et} \quad r([DF]) = [DF],$$

donc $\lambda(r)$ est une transposition de $\text{Bij}(X)$. De même, on en déduit que toutes les transpositions de $\text{Bij}(X)$ sont dans $\text{Im}(\lambda)$, donc on a $\text{Im}(\lambda) = \text{Bij}(X)$.

3) Comme $\text{Card}(\text{Ker}(\lambda)) = 2$, on en déduit que $\text{Ker}(\lambda) = \{\text{Id}, s_O\}$. Comme on a $s_O \notin \text{Isom}^+(\mathcal{C})$, on obtient par restriction de λ un morphisme de groupes injectif de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ dans $\text{Bij}(D)$. Ces deux ensembles ayant le même cardinal, on conclut que $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \text{Bij}(D) \simeq \mathfrak{S}_4$.

4) Comme O est l'isobarycentre des sommets de $\mathcal{C}$, on a que O est un point fixe de chaque élément de $\text{Isom}(\mathcal{C})$. En particulier, on a

$$\forall \sigma \in \text{Isom}(\mathcal{C}), \quad \sigma \circ s_O \circ \sigma^{-1} = s_{\sigma(O)} = s_O,$$

Finalement, l'élément s_O est centrale dans $\text{Isom}(\mathcal{C})$ et on vérifie facilement que

$$\psi : \text{Isom}^+(\mathcal{C}) \times \{\text{Id}, s_O\} \rightarrow \text{Isom}(\mathcal{C}), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta.$$

est un morphisme de groupes. Son noyau est $\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \cap \{\text{Id}, s_O\} = \{\text{Id}\}$, donc ψ est injective. Comme les groupes au départ et à l'arrivée ont le même cardinal, l'application ψ est un isomorphisme, d'où le résultat. $\square$

Références : • Exercice 8.11 de [Com98].

2. Remarques sur le développement

2.1. Isométries d'une partie

Rappelons que si X est une partie d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, on définit respectivement le groupe des isométries de X , le groupe des déplacements de X et l'ensemble des antidéplacements de X par

$$\begin{aligned}\text{Isom}(X) &= \{f \in \text{Isom}(\mathcal{E}) \mid f(X) = X\}, \\ \text{Isom}^+(X) &= \{f \in \text{Isom}^+(\mathcal{E}) \mid f(X) = X\}, \\ \text{Isom}^-(X) &= \{f \in \text{Isom}^-(\mathcal{E}) \mid f(X) = X\}.\end{aligned}$$

Les ensembles $\text{Isom}(X)$ et $\text{Isom}^+(X)$ sont des sous-groupes de $\text{Isom}(\mathcal{E})$.

2.2. Points extrémaux

Dans la développement, on a défini un cube comme l'ensemble de ses sommets pour éviter de devoir justifier qu'une isométrie préservant un cube plein préserve ses sommets. Voici une justification de cette dernière affirmation.

Si X est une partie convexe de $\mathcal{E}$, rappelons que l'on dit qu'un point $x \in X$ est extrémal s'il n'existe pas un couple $(A, B) \in X^2$ tel que $C \in]A, B[$. On a alors le résultat suivant.

Proposition : *On a les propriétés suivantes.*

- (i) Si $x \in X$ est un point extrémal de X et $f \in \text{Isom}(X)$, alors $f(x)$ est un point extrémal de X .
- (ii) Les points extrémaux d'un polyèdre convexe de $\mathcal{E}$ sont ses sommets.

DÉMONSTRATION :

1) Il suffit de remarquer que f est bijective et qu'une application affine conserve les barycentres.

2) Pour la seconde affirmation, voir [Com98, Partie 7.9]. □

Finalement, on a la proposition suivante.

Proposition : *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe de $\mathcal{E}$ où $\dim(\mathcal{E}) = 3$. On a*

$$\text{Isom}(\mathcal{P}) = \text{Isom}(\mathcal{P}_s) \quad \text{et} \quad \text{Isom}^+(\mathcal{P}) = \text{Isom}^+(\mathcal{P}_s)$$

où $\mathcal{P}_s \subset \mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$.

DÉMONSTRATION :

1) Un élément de $\text{Isom}(\mathcal{P})$ préserve les sommets de $\mathcal{P}$ d'après la proposition précédente, donc $\text{Isom}(\mathcal{P}) \subset \text{Isom}(\mathcal{P}_s)$.

2) Un élément de $\text{Isom}(\mathcal{P}_s)$ préserve l'enveloppe convexe de $\mathcal{P}_s$ qui est $\mathcal{P}$, donc $\text{Isom}(\mathcal{P}) \subset \text{Isom}(\mathcal{P}_s)$. □

Remarques :

- a) Plus généralement, une isométrie d'un polyèdre convexe non aplati de l'espace préserve les sommets, les arêtes et les faces du polyèdre.
- b) Si $\mathcal{P}$ est un polyèdre convexe non aplati de l'espace, on en déduit qu'il existe un morphisme de groupes injectifs

$$\lambda : \text{Isom}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Bij}(X)$$

où X est l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$.

2.3. Générateurs du groupe symétrique

On a utilisé la propositions suivantes dans le développement.

Proposition : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.*

DÉMONSTRATION :

Toutes permutations se décomposent en produit de cycles à supports disjoints. Pour conclure, il suffit de remarquer que si $x_1, \dots, x_r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont distincts deux à deux, alors on a la relation

$$(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_r) = (x_1 \ x_2)(x_2 \ x_3) \cdots (x_{r-1} \ x_r).$$

□

2.4. Correspondance des éléments via l'isomorphisme

On peut établir une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{S}_4$ et de $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$ via l'isomorphisme construit dans le développement.

$\mathfrak{S}_4$	$\text{Isom}^+(\mathcal{C})$	Cardinal
Id	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm\pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une grande diagonale et d'angle $\pm 2\pi/3$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm\pi/2$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm\pi$	3

3. Les autres polyèdres réguliers

3.1. Généralités

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3. Rappelons le théorème suivant.

Théorème : *L'ensemble des polyèdres réguliers de $\mathcal{E}$ sont à similitude près le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.*

DÉMONSTRATION :

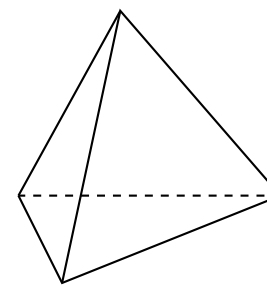
Voir [Com98, Partie 7.10]. □

3.2. Le tétraèdre régulier

Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de $\mathcal{E}$. On peut en construire un en considérant dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ les points

$$(1, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), (0, 0, \sqrt{2}).$$

On obtient la figure suivante.



Proposition : *On a les isomorphismes de groupes suivants.*

$$\text{Isom}(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \text{et} \quad \text{Isom}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{A}_4.$$

DÉMONSTRATION :

1) Le groupe $\text{Isom}(\mathcal{T})$ agit naturellement sur l'ensemble des sommets X de $\mathcal{T}$. On en déduit un morphisme de groupes $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Bij}(X)$. Comme les quatre sommets de $\mathcal{T}$ sont non coplanaires, l'application λ est injective. De plus, en considérant une réflexion par rapport au plan médiateur d'une des arêtes, on remarque que les transpositions sont dans $\text{Im}(\lambda)$. On conclut que λ est surjective et que $\text{Isom}(\mathcal{T}) \simeq \text{Bij}(X) \simeq \mathfrak{S}_4$.

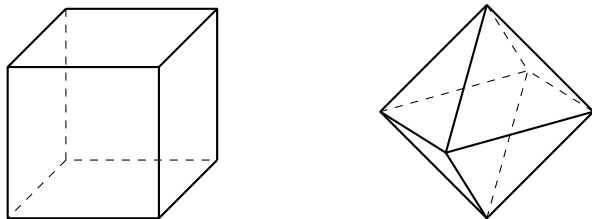
2) Si $r \in \text{Isom}(\mathcal{T})$ est une réflexion, l'application $\sigma \mapsto \sigma \circ r$ est une bijection de $\text{Isom}^+(\mathcal{T})$ sur $\text{Isom}^-(\mathcal{T})$, donc $\text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{T})) = 12$. On en déduit que l'image de $\text{Isom}^+(\mathcal{T})$ dans $\mathfrak{S}_4$ est d'indice 2, donc $\text{Isom}^+(\mathcal{T}) \simeq \mathfrak{A}_4$. □

On peut établir une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{S}_4$ et de $\text{Isom}(\mathcal{T})$.

$\mathfrak{S}_4$	$\text{Isom}(\mathcal{T})$	Cardinal
Id	Identité	1
(1 2)	Réflexion par rapport au plan médiateur d'une arête	6
(1 2 3)	Rotation d'axe une hauteur du tétraèdre et d'angle $\pm 2\pi/3$	8
(1 2 3 4)	Anti-rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposés et d'angle $\pm \pi/2$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	3

3.3. Le cube et l'octaèdre régulier

Soient $\mathcal{C}$ un cube de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{O}$ un octaèdre régulier de $\mathcal{E}$. On peut construire un cube avec les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$. Pour un octaèdre régulier, on peut considérer les points $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. On obtient les figures suivantes.



Proposition : On a les isomorphismes de groupes suivants.

$$\text{Isom}^+(\mathcal{C}) \simeq \text{Isom}^+(\mathcal{O}) \simeq \mathfrak{S}_4 \quad \text{et} \quad \text{Isom}(\mathcal{C}) \simeq \text{Isom}(\mathcal{O}) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

DÉMONSTRATION :

- 1) On a déjà étudié le cas du cube dans le développement.
- 2) Avec un raisonnement analogue à celui dans le développement, on a

$$\text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{O})) = 48 \quad \text{et} \quad \text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{O})) = 24.$$

- 3) Un élément de $\text{Isom}(\mathcal{O})$ préserve les centres des faces de $\mathcal{O}$. Or l'ensemble de ces points forment un cube $\mathcal{O}^*$. On a donc les inclusions $\text{Isom}(\mathcal{O}) \subset \text{Isom}(\mathcal{O}^*)$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{O}) \subset \text{Isom}^+(\mathcal{O}^*)$ ce qui permet de conclure avec le point précédent.

□

On peut établir une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{S}_4$ et de $\text{Isom}^+(\mathcal{O})$.

$\mathfrak{S}_4$	$\text{Isom}^+(\mathcal{O})$	Cardinal
Id	Identité	1
(1 2)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	6
(1 2 3)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm 2\pi/3$	8
(1 2 3 4)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \pi/2$	6
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm \pi$	3

3.4. Le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier

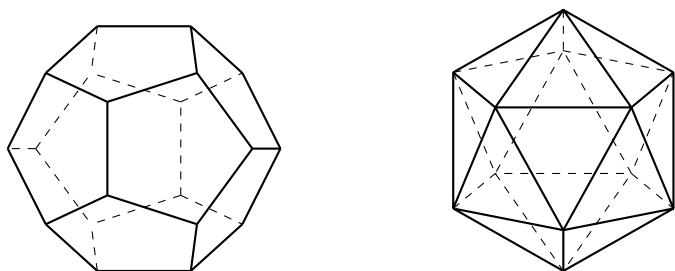
Soient $\mathcal{D}$ un dodécaèdre régulier de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ un icosaèdre régulier de $\mathcal{E}$. On peut construire un dodécaèdre régulier (ce qui justifie son existence) en considérant dans un repère orthonormé de $\mathcal{E}$, les points

$$\left(0, \pm \frac{1}{\varphi}, \pm \varphi\right), \left(\pm \frac{1}{\varphi}, \pm \varphi, 0\right), \left(\pm \varphi, 0, \pm \frac{1}{\varphi}\right), (\pm 1, \pm 1, \pm 1) \quad \text{où } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

De même, construire un icosaèdre régulier, on peut considérer les points

$$(\pm \varphi, \pm 1, 0), (\pm 1, 0, \pm \varphi), (0, \pm \varphi, \pm 1) \quad \text{où } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On obtient les figures suivantes.



Proposition : On a les isomorphismes de groupes suivants.

$$\text{Isom}^+(\mathcal{D}) \simeq \text{Isom}^+(\mathcal{I}) \simeq \mathfrak{A}_5 \quad \text{et} \quad \text{Isom}(\mathcal{D}) \simeq \text{Isom}(\mathcal{I}) \simeq \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

DÉMONSTRATION :

1) Avec un raisonnement analogue à celui dans le développement, on a

$$\text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{D})) = \text{Card}(\text{Isom}(\mathcal{I})) = 120,$$

$$\text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{D})) = \text{Card}(\text{Isom}^+(\mathcal{I})) = 60.$$

2) On remarque qu'il y a exactement 5 cubes inscrits dans le dodécaèdre $\mathcal{D}$ (on peut le vérifier par exemple avec un logiciel de calcul formel et les coordonnées des sommets données ci-dessus). En notant X l'ensemble de ces cubes, on a une action naturelle du groupe $\text{Isom}(\mathcal{D})$ sur X , donc on obtient un morphisme de groupes $\lambda : \text{Isom}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Bij}(X)$.

3) Si $\sigma \in \text{Ker}(\lambda)$, alors σ fixe toutes les grandes diagonales. On en déduit que l'on a $\text{Ker}(\lambda) = \{\text{Id}, s_O\}$ où O est le centre de $\mathcal{D}$. Comme dans le développement, on en déduit en restreignant λ un morphisme de groupes injectif de $\text{Isom}^+(\mathcal{D})$ dans $\text{Bij}(X)$. Comme $\lambda(\text{Isom}^+(\mathcal{D}))$ est d'indice 2 dans $\text{Bij}(X) \simeq \mathfrak{S}_5$, on conclut que $\text{Isom}^+(\mathcal{D}) \simeq \mathfrak{A}_5$.

4) On en déduit l'isomorphisme pour $\text{Isom}(\mathcal{D})$ comme dans le développement.

5) Un élément de $\text{Isom}(\mathcal{I})$ préserve les centres des faces de $\mathcal{I}$. Or l'ensemble de ces points forment un dodécaèdre régulier $\mathcal{I}^*$. On en déduit que l'on a les inclusions $\text{Isom}(\mathcal{I}) \subset \text{Isom}(\mathcal{I}^*)$ et $\text{Isom}^+(\mathcal{I}) \subset \text{Isom}^+(\mathcal{I}^*)$ ce qui permet de conclure avec le premier point. $\square$

On peut établir une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{A}_5$ et de $\text{Isom}^+(\mathcal{D})$.

$\mathfrak{A}_5$	$\text{Isom}^+(\mathcal{D})$	Cardinal
Id	Identité	1
(1 2 3)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés d'angle $\pm 2\pi/3$	20
(1 2 3 4 5)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm 2\pi/5$ ou $\pm 4\pi/5$	24
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm \pi$	15

On peut établir une correspondance entre les éléments de $\mathfrak{A}_5$ et de $\text{Isom}^+(\mathcal{S})$.

$\mathfrak{A}_5$	$\text{Isom}^+(\mathcal{S})$	Cardinal
Id	Identité	1
(1 2 3)	Rotation d'axe passant par les centres de deux faces opposées et d'angle $\pm 2\pi/3$	20
(1 2 3 4 5)	Rotation d'axe passant par deux sommets opposés et d'angle $\pm 2\pi/5$ ou $\pm 4\pi/5$	24
(1 2)(3 4)	Rotation d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées et d'angle $\pm\pi$	15

4. Les sous-groupes finis de $\text{Isom}(\mathcal{E})$

On commence par étudier le cas d'un plan euclidien.

Théorème : Les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien sont exactement à isomorphismes près les groupes cycliques.

DÉMONSTRATION :

Si G est un sous-groupe fini de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ et $P \in \mathcal{E}$, alors l'isobarycentre des points $\sigma(P)$ pour $\sigma \in G$ est un point fixe pour tous les éléments de G . On peut donc considérer G comme un sous-groupe de $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ qui est isomorphe au groupe $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Les sous-groupes finis de U sont

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

qui sont cycliques, d'où le résultat. $\square$

Remarque : Un sous-groupe de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ des déplacements d'un plan euclidien est le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le groupe diédral de cardinal $2n$. C'est le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés.

Théorème : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Les sous-groupes finis de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$ sont exactement à isomorphismes près

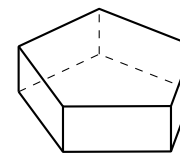
- (i) le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,
- (ii) le groupe diédral D_n avec $n \in \mathbb{N}^*$,
- (iii) les groupes $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_5$.

DÉMONSTRATION :

Voir [Com98, Partie 8.12]. $\square$

Remarques :

- a) Ce théorème s'applique aussi aux sous-groupes finis de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$, car on peut le considérer comme un sous-groupe de $\text{Isom}^+(\mathcal{E})$.
- b) Chacun des groupes ci-dessus est le groupe des déplacements d'un polyèdre de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.
 - (i) C'est le groupe des déplacements d'un polygone régulier à n côtés.
 - (ii) C'est le groupe des déplacements d'un « épaississement » d'un polygone régulier à n côtés. Par exemple, pour $n = 5$, on peut considérer le polygone représenter ci-dessous.



- (iii) Ce sont respectivement le groupe des déplacements d'un tétraèdre régulier, d'un cube et d'un dodécaèdre régulier.

Bibliographie

[Com98] F. COMBES – *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.